

Г. Е. КАРАДЖОВ

О КОММУТАТИВНОСТИ ДВУХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФУНКТОРОВ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 24 IX 1974)

Основной целью настоящей заметки является обобщение одного результата ⁽¹⁾ об устойчивости шкалы «средних» относительно комплексной интерполяции (см. также ⁽²⁾).

1. В этом пункте напомним некоторые факты из теории интерполяционных пространств.

1а. Метод «средних». Пусть (F_0, F_1) — совместная пара банаховых пространств (см. ^(7, 8)). Для любого $t \geq 0$ определим функционалы Петре ⁽³⁾:

$$K(t, a) = K(t, a; F_0, F_1) = \inf \{ \|a_0\|_{F_0} + t\|a_1\|_{F_1}; a = a_0 + a_1 \}, \quad a \in F_0 + F_1;$$

$$J(t, a) = J(t, a; F_0, F_1) = \max(\|a\|_{F_0}, t\|a\|_{F_1}), \quad a \in F_0 \cap F_1.$$

Далее, пусть Φ — банахова решетка на $R_+ = (0, \infty)$ по мере Хаара dt/t (см. ⁽⁶⁾). Выделим следующие условия, которые вместе или по отдельности будем накладывать на решетку Φ (см. ^(4, 5)):

1°) $\|\varphi(st)\|_{\Phi} \leq f(s)\|\varphi(t)\|_{\Phi}$, $\min(1, 1/s)f(s) \rightarrow 0$ ($s \rightarrow 0$ или $s \rightarrow \infty$),

$$\int_0^{\infty} \min\left(1, \frac{1}{s}\right) f(s) \frac{ds}{s} \stackrel{\text{def}}{=} \beta < \infty;$$

2°) $\|\min(1, t)\|_{\Phi} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma < \infty$;

$$3^{\circ}) \quad \int_0^{\infty} \min\left(1, \frac{1}{s}\right) \varphi(s) \frac{ds}{s} \leq \delta \|\varphi\|_{\Phi};$$

4°) если $0 \leq \varphi_n \leq \varphi$, $\varphi \in \Phi$ и $\varphi_n \rightarrow 0$ почти всюду, то $\|\varphi_n\|_{\Phi} \rightarrow 0$.

Например, банахова решетка $\Phi_{\theta, p}$ ($0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$) с нормой

$$\left[\int_0^{\infty} t^{-\theta p} |\varphi(t)|^p \frac{dt}{t} \right]^{1/p}$$

удовлетворяет условиям 1°) — 3°) и условию 4°), если $1 \leq p < \infty$.

Пространство «средних» $(F_0, F_1)_{\Phi, K}$, построенное по K -методу (см. ⁽³⁻⁵⁾), определяется как совокупность всех элементов $a \in F_0 + F_1$, для которых

$$N(a | (F_0, F_1)_{\Phi, K}) \stackrel{\text{def}}{=} \|K(t, a)\|_{\Phi} < \infty.$$

Пространство «средних» $(F_0, F_1)_{\Phi, J}$, построенное по J -методу, есть множество всех элементов $a \in F_0 + F_1$, для которых найдется $F_0 \cap F_1$ -значная измеримая на R_+ функция $a(t)$ такая, что

$$\|J(t, a(t))\|_{\Phi} < \infty, \quad a = \int_0^{\infty} a(t) \frac{dt}{t}.$$

Пространство $(F_0, F)_{\Phi, J}$ является банаховым относительно нормы

$$N(a | (F_0, F_1)_{\Phi, J}) = \inf \left\{ \|J(t, a(t))\|_{\Phi}; \quad a = \int_0^{\infty} a(t) \frac{dt}{t} \right\}.$$

Теорема А (теорема эквивалентности, см. ^(4, 5)). Если Φ — банахова решетка, обладающая свойством 1^0), то $(F_0, F_1)_{\Phi, K} = (F_0, F_1)_{\Phi, J}$ и

$$\varepsilon_0 N(a | (F_0, F_1)_{\Phi, J}) \leq N(a | (F_0, F_1)_{\Phi, K}) \leq \beta N(a | (F_0, F_1)_{\Phi, J}),$$

где $\varepsilon_0 = \max_{\varepsilon > 1} (1 + \varepsilon)^{-1} \log \varepsilon$.

Замечание 1. Пусть Φ — банахова решетка, удовлетворяющая условиям 1^0), 2^0). Тогда пространство $(F_0, F_1)_{\Phi} \stackrel{\text{def}}{=} (F_0, F_1)_{\Phi, K} = (F_0, F_1)_{\Phi, J}$ является промежуточным между F_0 и F_1 , т. е. $F_0 \cap F_1 \subset (F_0, F_1)_{\Phi} \subset F_0 + F_1$. Далее, вместо $(F_0, F_1)_{\Phi_{\theta p}}$ будем писать $(F_0, F_1)_{\theta p}$.

1б. Комплексный метод. Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{H}(F_0, F_1)$ обозначает множество всех $(F_0 + F_1)$ -значных функций, определенных в полосе $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ комплексной плоскости, которые ограничены и непрерывны в замкнутой полосе и аналитичны в открытой полосе, а на границе $\operatorname{Re} z = k$ непрерывны и ограничены как функции со значениями в F_k , $k = 0, 1$.

Комплексное интерполяционное пространство $[F_0, F_1]_{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ (см. ^(6, 7)) определяется как совокупность всех элементов $a \in F_0 + F_1$ таких, что $a = f(\alpha)$ для некоторого $f \in \mathcal{H}(F_0, F_1)$. Это банахово пространство с нормой

$$N(a | [F_0, F_1]_{\alpha}) = \inf \{ \max_{k=0,1} \sup_t \|f(k+it)\|_{F_k}; \quad f \in \mathcal{H}, \quad f(\alpha) = a \}.$$

Далее, если Φ_0 и Φ_1 — две банаховы решетки на R_+ , то решетка Гальдерона $\Phi_0^{1-\alpha} \Phi_1^{\alpha}$ есть, по определению (см. ⁽⁶⁾), множество всех измеримых на R_+ функций φ , для которых найдутся число $\lambda \geq 0$ и функции $\varphi_i \in \Phi_i$, $\|\varphi_i\|_{\Phi_i} \leq 1$, $i = 0, 1$, такие, что $|\varphi(t)| \leq \lambda |\varphi_0(t)|^{1-\alpha} |\varphi_1(t)|^{\alpha}$. Эта банахова решетка относительно нормы $\|\varphi\|_{\Phi_0^{1-\alpha} \Phi_1^{\alpha}} = \inf \{ \lambda \geq 0; \quad |\varphi(t)| \leq \lambda |\varphi_0(t)|^{1-\alpha} \cdot |\varphi_1(t)|^{\alpha} \}$.

Замечание 2. Если Φ_0 и Φ_1 удовлетворяют свойству 1^0) с f_0 и f_1 соответственно, то $\Phi_0^{1-\alpha} \Phi_1^{\alpha}$ также удовлетворяет свойству 1^0) с $f = f_0^{1-\alpha} f_1^{\alpha}$.

Теорема В (см. ⁽⁶⁾).

$$\Phi_{\theta_0 p_0}^{1-\alpha} \Phi_{\theta_1 p_1}^{\alpha} = \Phi_{\theta p}, \quad \theta = (1-\alpha)\theta_0 + \alpha\theta_1, \quad 1/p = (1-\alpha)/p_0 + \alpha/p_1, \quad 1 \leq p_0, p_1 < \infty.$$

2. Теперь мы в состоянии сформулировать основной результат работы.

Теорема. Если банаховы решетки Φ_0 и Φ_1 удовлетворяют условиям 1^0) — 4^0), то

$$[(F_0, F_1)_{\Phi_0}, (F_0, F_1)_{\Phi_1}]_{\alpha} = (F_0, F_1)_{\Phi_0^{1-\alpha} \Phi_1^{\alpha}}$$

с эквивалентными нормами.

В частности, с помощью теоремы В получаем

Следствие

$$[(F_0, F_1)_{\theta_0 p_0}, (F_0, F_1)_{\theta_1 p_1}]_{\alpha} = (F_0, F_1)_{(1-\alpha)\theta_0 + \alpha\theta_1, p}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\alpha}{p_0} + \frac{\alpha}{p_1},$$

$$1 \leq p_0, p_1 < \infty. \quad (1)$$

В этом случае, когда (F_0, F_1) — совместная пара рефлексивных банаховых пространств и $1 < p_0 = p_1 < \infty$, формула (1) доказана в работе ⁽¹⁾. Эта формула вытекает также из соответствующего результата работы ⁽²⁾, но только при некоторых дополнительных предположениях на пару (F_0, F_1) .

Доказательство теоремы получается из следующих двух лемм, представляющих, возможно, самостоятельный интерес, и теоремы А. Лемма 1

является, по-видимому, новой. Идея доказательства леммы 2 подсказана работой ⁽¹⁾.

Л е м м а 1. Если Φ_0 и Φ_1 — банаховы решетки, обладающие свойством 2^0), то

$$[(F_0, F_1)_{\Phi_0, K}, (F_0, F_1)_{\Phi_1, K}]_{\alpha} \subset (F_0, F_1)_{\Phi_0^{1-\alpha} \Phi_1^{\alpha}, K}$$

с константой вложения, равной единице.

Л е м м а 2. Пусть банаховы решетки Φ_0 и Φ_1 удовлетворяют условиям 1^0)— 4^0). Тогда

$$[(F_0, F_1)_{\Phi_0, J}, (F_0, F_1)_{\Phi_1, J}]_{\alpha} \supset (F_0, F_1)_{\Phi_0^{1-\alpha} \Phi_1^{\alpha}, J}$$

с константой вложения, равной единице.

Доказательство леммы 1. Пусть $G_i = (F_0, F_1)_{\Phi_i, K}$, $i=0, 1$, и $a \in [G_0, G_1]_{\alpha}$. Тогда $a = f(\alpha)$, где $f \in \mathcal{H}(G_0, G_1)$. Согласно формуле Коши для полосы $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, $z = \sigma + i\tau$ можно написать

$$f(\sigma + i\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(is) M_{0\sigma}(\tau - s) ds + \int_{-\infty}^{\infty} f(1 + is) M_{1\sigma}(\tau - s) ds, \quad (2)$$

где ядра Пуассона имеют вид

$$M_{k\sigma}(\tau) = e^{\pi\tau} \sin \pi\sigma / [\sin^2 \pi\sigma + (\cos \pi\sigma + (2k-1)e^{\pi\tau})^2], \quad k=0, 1.$$

Положим $\mu = \mu(t) = \ln [\alpha b_0(t) / (1-\alpha) b_1(t)]$, где $0 < t < \infty$ и

$$b_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, f(is); F_0, F_1) M_{k\alpha}(-s) ds, \quad k=0, 1.$$

Определим функцию $g(t, z)$ соотношением $g(t, z) = e^{\mu(z-\alpha)} f(z)$. Очевидно, $g(t, \alpha) = a$ и $g(t, z) \in \mathcal{H}(G_0, G_1)$. Поэтому из (2) получаем, что

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu(is-\alpha)} f(is) M_{0\alpha}(-s) ds + \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu(1+is-\alpha)} f(1+is) M_{1\alpha}(-s) ds,$$

откуда, применяя норму $K(t, \cdot) = K(t, \cdot; F_0, F_1)$, находим неравенство

$$K(t, a) \leq \left[\frac{b_0(t)}{1-\alpha} \right]^{1-\alpha} \left[\frac{b_1(t)}{\alpha} \right]^{\alpha}. \quad (3)$$

Поскольку

$$\|b_k(t)\|_{\Phi_k} \leq \sup N(f(k+is) | G_k) [(2k-1)\alpha + 1 - k], \quad k=0, 1,$$

то из (3) следует, что $K(t, a) \in \Phi_0^{1-\alpha} \Phi_1^{\alpha}$ и

$$N(a | (F_0, F_1)_{\Phi_0^{1-\alpha} \Phi_1^{\alpha}, K}) \leq \max_{h=0,1} \sup_s N(f(k+is) | G_h).$$

Переходя к инфимуму в правой части, получаем утверждение леммы.

В заключение автор выражает благодарность М. З. Соломяку за постоянное внимание к работе.

Математический институт
Болгарской Академии наук
София

Поступило
3 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ J. L. Lions, C. R., v. 256, № 4 (1963). ² P. Grisvard, J. Math., Paris, v. 4, № 2 (1966). ³ J. Peetre, Ric. Mat., v. 12, № 2 (1963). ⁴ J. Peetre, Rend. Sem. Mat. Fis., Milano, v. 34 (1964). ⁵ K. Yoshinaga, Bull. Kyushu Inst. Tech. (MNS), v. 17 (1970). ⁶ А. П. Кальдерон, Сб. пер. Математика, т. 9, № 3 (1965). ⁷ С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, УМН, т. 21, № 2 (1966). ⁸ J. L. Lions, J. Peetre, Publ. Math. IHES, v. 19 (1964).