

Б. С. КАШИН

О МНОЖИТЕЛЯХ ВЕЙЛЯ

(Представлено академиком С. М. Никольским 6 II 1975)

Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная на отрезке $[0, 1]$ система функций (о.н.с.). Последовательность чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_{n+1} \geq \lambda_n$, называется множителем Вейля для сходимости почти всюду (п.в.) рядов по этой системе, если из условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \lambda_n < \infty \quad (1)$$

следует, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad (2)$$

сходится п.в. на отрезке $[0, 1]$.

Последовательность $\{\lambda_n\}$, являющаяся множителем Вейля, называется точным множителем Вейля, если для любой последовательности $\beta_n = o(\lambda_n)$ найдется ряд (2), расходящийся на множестве положительной меры, хотя

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \beta_n < \infty.$$

Классическая теорема, доказанная Д. Меньшовым и Радемахером (1921 г.), состоит в том, что $\lambda_n = \log^2 n$ является множителем Вейля для сходимости п.в. рядов по любой о.н.с. Одновременно Меньшовым была построена о.н.с., для которой $\lambda_n = \log^2 n$ — точный множитель Вейля. Система, построенная Меньшовым, состояла из существенно неограниченных функций и долгое время было неясно, какой порядок может иметь множитель Вейля для рядов по о.н.с., ограниченным в совокупности.

В 1937 г. Меньшов (см. ⁽¹⁾) доказал, что для любого $K > 1$ существует о.н.с. $\{\varphi_n(x)\}$ такая, что:

- 1) $|\varphi_n(x)| \leq K$; $n=1, 2, \dots$, $x \in [0, 1]$;
- 2) последовательность $\{\log^2 n\}$ является ее точным множителем Вейля.

Представляет интерес рассмотреть случай $K=1$. Еще в 1927 г. А. Н. Колмогоровым и Меньшовым в работе ⁽²⁾ была построена о.н.с. $\{\varphi_n(x)\}$ такая, что:

- 1) $|\varphi_n(x)| = 1$, $n=1, 2, \dots$, $x \in [0, 1]$;
- 2) любая последовательность $\{\beta_n\}$ с $\beta_n = o(\log n)$ не является множителем Вейля для сходимости п.в. рядов по этой системе.

В 1969 г. Тандори ⁽³⁾ доказал одну теорему в этом же направлении. Именно: для всякого $\varepsilon > 0$ существует о.н.с.

$$\{\varphi_n(x)\} \text{ с } |\varphi_n(x)| = 1 \text{ при } n=1, 2, \dots, x \in [0, 1]$$

и ряд (2) такой, что:

$$1) \sum_{n=3}^{\infty} c_n^2 \log n (\log \log n)^{4-\varepsilon} < \infty;$$

2) ряд (2) расходится п.в. после некоторого изменения порядка членов.

Понижение множителя Вейля для о.н.с. $\{\varphi_n(x)\}$ с $|\varphi_n(x)| \equiv 1$ давало бы важные следствия в различных задачах, однако справедлива следующая

Теорема 1. *Существует о.н.с. $\{\varphi_n(x)\}$ с $|\varphi_n(x)| \equiv 1$, $n=1, 2, \dots$, $x \in [0, 1]$, такая, что последовательность $\lambda_n = \log^2 n$ является ее точным множителем Вейля.*

Теорема 1 выводится с помощью стандартных рассуждений из следующего утверждения.

Основная лемма. *Существуют абсолютные постоянные $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ и $M \geq 1$ такие, что для любого натурального q найдется система измеримых функций $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{2^q}$, определенная на отрезке $[0, 2M+1]$, удовлетворяющая условиям:*

$$1) |\varphi_j(x)| \equiv 1, j=1, 2, \dots, 2^q, x \in [0, 2M+1];$$

$$2) \int_0^{2M+1} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0 \text{ при } i \neq j, 1 \leq i, j \leq 2^q;$$

3) при некоторых функциях $N_1^q(x)$ и $N_2^q(x)$ мера

$$\mu \left\{ x : \left| \sum_{N_1^q(x)}^{N_2^q(x)} \varphi_j(x) \right| > C_1 \sqrt{2^q} \cdot q \right\} > C_2.$$

Отметим, что при доказательстве основной леммы существенно используются вероятностные соображения. При доказательстве теоремы 1 получается следующий промежуточный результат:

Для каждого натурального n найдется такой полином

$$P_n(t) = \sum_{k=-n}^n \varepsilon_k e^{ikt}, \quad \varepsilon_k = \pm 1,$$

что:

$$1) \|P_n(t)\|_c \leq A \sqrt{n},$$

$$2) \|\sum_0^n \varepsilon_k e^{ikt}\|_c \geq |\sum_0^n \varepsilon_k| \geq B \sqrt{n} \log n,$$

где A и B — абсолютные положительные постоянные.

С помощью этого результата легко доказывается следующая

Теорема 2. *Существует непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

такая, что:

1) модуль непрерывности

$$\omega(\delta, f) = O\left(\frac{1}{\log(1/\delta)}\right);$$

$$2) |a_1| > |a_2| > \dots$$

3) ряд Фурье функции $f(x)$ расходится при $x=0$.

Этот результат является усилением одной теоремы Салема (см. (4)), который установил аналогичное утверждение без условия 1.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
29 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Д. Меньшов, Матем. сб., № 1, 3 (45) (1938). ² А. Колмогоров, Д. Меньшов, Math. Zs., 26 (1927). ³ K. Tandori, Acta Math. Hungar., № 3—4, 20 (1969). ⁴ R. Salem, Indag. Math., v. 16 (1954).