

А. Б. КАТОК

ЗАМЕНА ВРЕМЕНИ, МОНОТОННАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И СТАНДАРТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 13 III 1975)

1. Обозначения. В этой работе через (M, μ) обозначаются пространства Лебега, буквами S и T — эргодические автоморфизмы пространства Лебега, символами $\{S_t\}$ и $\{T_t\}$ — измеримые потоки. Буквы могут снабжаться дополнительными индексами. Специальный поток, построенный по автоморфизму T и положительной функции $f \in L^1(M, \mu)$, обозначается $\{T_t^f\}$. Производный автоморфизм от T на измеримом множестве A и специальный автоморфизм, построенный по T и функции $n \in L^1(M, \mu)$, принимающей натуральные значения, обозначаются T_A и $T_{n(\cdot)}$ соответственно. Определения см. (1). Последние две конструкции объединяются следующим образом: пусть $m \in L^1(M, \mu)$ — функция, принимающая неотрицательные целые значения. Обозначим $\bar{m} = m|_{M \setminus m^{-1}(0)}$, $T_{m(\cdot)} = (T_{M \setminus m^{-1}(0)})_{\bar{m}(\cdot)}$.

Поток $\{T_t\}$ получается из потока $\{S_t\}$ заменой времени, гладкой вдоль траекторий, если существует измеримая функция $\varphi: M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, задающая при почти каждом $x \in M$ сохраняющий ориентацию диффеоморфизм прямой $\mathbb{R}$ и такая, что $\text{mod } 0$

$$\varphi(x, t_1 + t_2) = \varphi(x, t_1) + \varphi(S_{\varphi(x, t_1)} x, t_2), \quad T_t x = S_{\varphi(x, t)} x,$$

причем $\rho^{-1} \in L^1(M, \mu)$, где $\rho(x) = \partial \varphi(x, t) / \partial t|_{t=0}$. Очевидно, поток $\{T_t\}$ сохраняет меру $\rho^{-1} \mu$.

Определение 1. Измеримые потоки $\{S_t\}$ и $\{T_t\}$ называются монотонно эквивалентными, если поток $\{T_t\}$ метрически изоморфен потоку, который получается из потока $\{S_t\}$ заменой времени, гладкой вдоль траекторий.

Предложение 1. Потоки $\{S_t\}$ и $\{T_t\}$ монотонно эквивалентны тогда и только тогда, когда они метрически изоморфны специальным потокам над одним и тем же автоморфизмом.

Определение 2. Эргодические автоморфизмы T и S называются монотонно эквивалентными, если автоморфизм T метрически изоморфен некоторому автоморфизму $S_{m(\cdot)}$, где m — функция с неотрицательными целыми значениями.

Предложение 2. Специальные потоки $\{T_t^{f_1}\}$ и $\{S_t^{f_2}\}$ (T и S — эргодические автоморфизмы) монотонно эквивалентны тогда и только тогда, когда автоморфизмы T и S монотонно эквивалентны.

2. Нашей задачей является изучение свойств эргодических автоморфизмов и потоков, инвариантных относительно монотонной эквивалентности. Настоящая работа является первым шагом в этом направлении. Она посвящена одному классу монотонно эквивалентных автоморфизмов и отчасти соответствующему классу потоков. Этот класс — стандартные автоморфизмы (см. определение 3), как показано ниже (следствие 4 и предложение 4), естественно считать простейшим классом монотонно эквивалентных эргодических автоморфизмов. Отметим, что аналогичного простейшего класса метрически изоморфных автоморфизмов не существует.

Хотя исходная и более естественная формулировка относится к потокам (например, в случае потоков существуют непрерывные и гладкие

аналоги рассматриваемых понятий), мы приведем подробные формулировки дальнейших определений и результатов для автоморфизмов, а в конце укажем некоторые следствия, относящиеся к потокам. Наш выбор объясняется тем, что в метрической ситуации формулировки для дискретного времени оказываются более простыми. Результаты о потоках частично следуют из результатов об автоморфизмах, а частично доказываются параллельно.

Мотивировкой для изучения монотонной эквивалентности послужили следующие два обстоятельства.

Во-первых, задача метрической классификации автоморфизмов и потоков, которая считалась основной задачей эргодической теории, оказалась безнадежной не только в полной общности, но, по-видимому, также для наиболее важных специальных классов динамических систем в частности для K -систем (см. ^(2, 3)) и (в некотором смысле противоположный пример) для динамических систем, допускающих хорошую периодическую аппроксимацию. Как мы покажем ниже, в последнем случае трудности исчезают при переходе к монотонной классификации.

Во-вторых, все успехи в направлении топологической или гладкой классификации гладких потоков с достаточно большим множеством неподвижных точек относятся к классификации с точностью до замены времени. В качестве примеров укажем на структурную устойчивость $\mathcal{U}$ -потоков ⁽⁴⁾ и на теорию потоков на торе ⁽⁵⁾ и на других поверхностях ⁽⁶⁾.

3. Обозначим $\hat{Q}$ группу всех корней из 1 с дискретной топологией $\hat{Q}^*$ — двойственную $\hat{Q}$ компактную группу целых идеалей, $\chi_0 \in \hat{Q}^*$ — характер группы $\hat{Q}$, порожденный тождественным вложением $\hat{Q}$ в окружность, D — преобразование группы $\hat{Q}^*$, состоящее в умножении на элемент χ_0 . Очевидно, D является автоморфизмом пространства Лебега $\hat{Q}^*$ с мерой Хаара, причем D имеет дискретный спектр, а группа собственных значений совпадает с $\hat{Q}$.

Определение 3. Автоморфизм называется стандартным, если он монотонно эквивалентен автоморфизму D . Поток называется стандартным, если он метрически эквивалентен специальному потоку на стандартном автоморфизмом.

Определение 4 (ср. с ⁽⁷⁾, определение 1.1). Автоморфизм T допускает хорошую аппроксимацию периодическими преобразованиями (а.п.п.), если найдется последовательность конечных измеримых разбиений $\xi_n = (c_n^1, \dots, c_n^{q_n} = c_n^0, d_n)$ пространства M с следующими свойствами:

$$4.1) \mu(c_n^1) = \mu(c_n^2) = \dots = \mu(c_n^{q_n});$$

$$4.2) \xi_n \rightarrow \varepsilon \text{ при } n \rightarrow \infty;$$

$$(4.3) \sum_{i=0}^{q_n-1} \mu(TC_n^i \Delta c_n^{i+1}) = o(q_n^{-1}).$$

Теорема 1. Пусть автоморфизм $T: (M, \mu) \rightarrow (M, \mu)$ допускает хорошую а.п.п. и $0 < \beta < 1$.

Тогда найдутся множество $A \subset M$, $\mu(A) = \beta$ и функция с натуральными значениями $n \in L^1(M, \mu)$, $\int_M n d\mu = \beta^{-1}$ такие, что производный автоморфизм

T_A и специальный автоморфизм $T_{n(\cdot)}$ метрически изоморфны автоморфизму D .

Следствие 1. Автоморфизм, допускающий хорошую а.п.п., стандартен.

Обращение следствия 1 неверно. Оказывается, однако (и в этом состоит первый из наших основных результатов), что стандартность эквивалентна некоторому аппроксимационному свойству, более слабому, чем хорошая а.п.п.

Обозначим $Z_q = \{0, 1, \dots, q-1\}$, $X_q = [0, 1] \times Z_q$. λ_q — прямое произведение меры Лебега на отрезке $[0, 1]$ и равномерной нормированной меры на Z_q .

Определение 5. Частичной монотонной структурой автоморфизма T называется пара (F, φ) , где F — измеримое подмножество M , $\varphi: F \rightarrow X_q$ — измеримое отображение, причем $\text{mod } 0$ выполняются следующие свойства:

5.1) если $A \subset F$ — измеримое множество, то $\lambda_q(\varphi(A)) = \alpha(\varphi) \cdot \mu(A)$, где $\alpha(\varphi) > 0$ не зависит от A ;

5.2) если $x_1, x_2 \in F$, $\varphi(x_1) = (t, m)$, $\varphi(x_2) = (t, m+k)$, $k > 0$, то $x_2 = T^k x_1$, где $l > 0$.

5.3) если $x \in F$, $\varphi(x) = (t, m)$, то либо $\varphi(T^k x) = (t, m+k)$, $k > 0$, либо $\varphi(F) \cap (\{t\} \times \{m+1, \dots, q-1\}) = \emptyset$.

Обозначим $\xi(F, \varphi)$ разбиение пространства M на множества $\varphi^{-1}([0, 1] \times \{i\})$, $i=0, 1, \dots, q-1$, $M \setminus F$.

Определение 6. Автоморфизм T допускает монотонную аппроксимацию, если существует последовательность (F_n, φ_n) частичных монотонных структур автоморфизма T такая, что при $n \rightarrow \infty$ $\xi(F_n, \varphi_n) \rightarrow \xi$ и $\alpha(\varphi_n) \rightarrow 1$.

Теорема 2. Автоморфизм T допускает монотонную аппроксимацию тогда и только тогда, когда T стандартен.

Следствие 2. Проективный предел стандартных автоморфизмов является стандартным автоморфизмом.

4. Пусть N, n — натуральные числа. Обозначим

$$\Omega_{N, n} = \{\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{n-1}) : \omega_i \in \{1, \dots, N\}, i=0, 1, \dots, n-1\}.$$

Определим в множествах $\Omega_{N, n}$ две важные метрики: ρ^H и ρ^M . Назовем элементарной H -операцией переход от элемента $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{n-1})$ к любому элементу вида $(\omega_0, \dots, \omega_{i-1}, \alpha, \omega_{i+1}, \dots, \omega_{n-1})$, где $\alpha \in \{1, \dots, N\}$, $i=0, 1, \dots, n-1$, а элементарной M -операцией — переход от ω к $(\omega_0, \dots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \dots, \omega_{j-1}, \alpha, \omega_j, \dots, \omega_{n-1})$ или аналогичную процедуру с $i \geq j$. Будем для краткости писать A там, где может стоять H или M . Положим для $\omega^{(1)}, \omega^{(2)} \in \Omega_{N, n}$ расстояние $\rho^A(\omega^{(1)}, \omega^{(2)})$ равным минимальному числу элементарных A -операций, с помощью которых можно превратить $\omega^{(1)}$ в $\omega^{(2)}$, поделенному на n . Обозначим для $\omega \in \Omega_{N, n}$, $r > 0$, через $B^A(\omega, r)$ шар радиуса r с центром в ω в метрике ρ^A . Заметим, что ρ^H — это известная метрика Хэмминга. Метрика ρ^M ранее, по-видимому, не встречалась. Обозначим $R: \Omega_{N, n} \rightarrow \Omega_{N, n}$ правый циклический сдвиг:

$$R(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}) = (\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega_0).$$

Пусть $\xi = (c_1, \dots, c_{|\xi|})$ — упорядоченное конечное измеримое разбиение пространства M , T — автоморфизм. Определим отображение $\varphi_{\xi, n}: M \rightarrow \Omega_{|\xi|, n}$, полагая для $x \in M$, $\varphi_{\xi, n}(x) = (k_0(x), \dots, k_{n-1}(x))$, где $T^i x \in c_{k_i(x)}$, $i=0, 1, \dots, n-1$. Мету $(\varphi_{\xi, n})_* \mu$ в пространстве $\Omega_{|\xi|, n}$ для краткости будем обозначать μ_n , считая, что автоморфизм T и разбиение ξ фиксированы.

Определение 7. Автоморфизм T называется A -почти-периодическим, если для любого упорядоченного конечного измеримого разбиения ξ найдутся последовательности $p_n \rightarrow \infty$, $q_n \rightarrow \infty$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ (p_n и q_n — натуральные числа, $\varepsilon_n > 0$) и последовательность $\omega^{(n)} \in \Omega_{|\xi|, p_n q_n}$ такая, что

$$R^{q_n} \omega^{(n)} = \omega^{(n)} \text{ и } \mu_{p_n q_n} \left(\bigcup_{s=0}^{q_n-1} B^A(R^s \omega^{(n)}, \varepsilon_n) \right) > 1 - \varepsilon_n.$$

Теорема 3. Автоморфизм T допускает хорошую а.п.п. тогда и только тогда, когда T H -почти периодичен.

Теорема 4 (второй критерий стандартности). Следующие свойства автоморфизма T эквивалентны:

- 1) T допускает монотонную аппроксимацию;
- 2) T M -почти-периодичен;
- 3) для любого упорядоченного конечного измеримого разбиения ξ и

любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что при $n > N$ для некоторого $\omega^{(n)} \in \Omega_{|\xi|, n}$ $\mu_n(B^M(\omega^{(n)}, \varepsilon)) > 1 - \varepsilon$.

Предложение 3. Эргодический автоморфизм с дискретным спектром H -почти-периодичен.

Из теорем 1 и 3 и предложения 3 получаем

Следствие 3. Пусть $T: (M_1, \mu_1) \rightarrow (M_1, \mu_1)$, $S: (M_2, \mu_2) \rightarrow (M_2, \mu_2)$ — два эргодических автоморфизма с дискретным спектром, $0 < \beta < 1$. Найдутся измеримое множество $A \subset M_1$, $\mu(A) = \beta$ и функция с натуральными значениями $n \in L^1(M_1, \mu) \cap n d\mu = \beta^{-1}$ такие, что производный автоморфизм T_A и специальный автоморфизм $T_{n(\cdot)}$ метрически изоморфны S .

Из теорем 2 и 4 получаем

Следствие 4. Фактор-автоморфизм стандартного автоморфизма по бесконечному инвариантному измеримому разбиению является стандартным автоморфизмом.

Предложение 4. Для любого эргодического автоморфизма T и стандартного автоморфизма S найдется автоморфизм T_1 , монотонно эквивалентный T и имеющий такое инвариантное измеримое разбиение ξ , что фактор-автоморфизм $T_1|_\xi$ метрически изоморфен S .

Из следствия 4 вытекает, что утверждение предложения 4 перестает быть верным, если взять в качестве S произвольный нестандартный автоморфизм.

5. Мы не будем подробно формулировать все результаты о стандартных потоках, а приведем одно следствие из наших утверждений и следующего результата Д. Орнштейна (устное сообщение во время международного конгресса математиков в Ванкувере):

Любой поток, получающийся заменой времени из непрерывного потока $\{S_t\}$ на компактном метрическом пространстве с борелевской инвариантной мерой, метрически изоморфен некоторому потоку, получающемуся из $\{S_t\}$ непрерывной заменой времени.

Следствие 5. Пусть $\{T_t\}$ — стандартный поток, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$, — такой вектор, что поток $\{S_t^\gamma\}$ на n -мерном торе, порождаемый векторным полем $v_\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i \partial / \partial x_i$ ($x_1, \dots, x_n$ — циклические координаты на

торе) эргодичен. Существует непрерывная положительная функция F , бесконечно дифференцируемая вдоль траекторий потока $\{S_t^\gamma\}$ и такая, что поток, порождаемый векторным полем $F \cdot v_\gamma$, метрически изоморфен $\{T_t\}$.

Отсюда следует, в частности, что при непрерывной замене времени условно-периодическое движение на торе может превратиться в произвольный аperiodический эргодический поток с дискретным спектром. Разумеется, собственные функции такого потока будут разрывными. Следует отметить, что в силу строгой эргодичности метрические свойства относительно абсолютно непрерывной инвариантной меры имеют в этом случае топологически инвариантный смысл.

В заключение выражаю благодарность А. В. Кочергину и Е. А. Сатаеву за плодотворные обсуждения вопросов, рассматриваемых в настоящей работе.

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР
Москва

Поступило
11 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Рошлин, УМН, т. 15, № 4 (1960). ² D. S. Ornstein, P. C. Shields, Adv. Math., v. 10, N 1 (1973). ³ D. S. Ornstein, Adv. Math., v. 10, N 1 (1973). ⁴ Д. В. Аносов, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, т. 90 (1967). ⁵ А. Н. Колмогоров, ДАН, т. 93, № 6 (1953). ⁶ А. Б. Каток, ДАН, т. 211, № 4 (1973). ⁷ А. Б. Каток, А. М. Степин, УМН, т. 22, № 5 (1967).