

УДК 517.917:629.191

МЕХАНИКА

В. В. ЛАРИЧЕВА

СКВОЗНАЯ АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ, БЛИЗКОЙ К КОНСЕРВАТИВНОЙ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 22 XI 1974)

Для уравнения с малым параметром $\varepsilon > 0$

$$\ddot{\alpha} + \varepsilon [\varphi_1(\tau, \alpha) \dot{\alpha} + \varphi_2(\tau, \alpha)] + \varphi(\tau, \alpha) = 0, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (1)$$

показывается равномерность асимптотического представления амплитудных характеристик в области колебаний (вращений) вплоть до сепаратрисы. Здесь важна неавтономность (1) и быстрота прохождения сепаратрисы. Определяется момент перехода из одной области в другую. Применяемые соображения аналогичны идее связующих областей А. А. Дородницына ⁽¹⁾ и обобщают ⁽²⁻⁴⁾. В (1) и далее точкой сверху обозначено дифференцирование по t , функции φ_1 , φ_2 , φ периодичны (при $\tau = \text{const}$) по α с периодом 2π .

$$\varphi(\tau, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\tau) \sin n\alpha, \quad f(\tau, \alpha) = \int^{\alpha} \varphi(\tau, \alpha) d\alpha = - \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\tau) \frac{\cos n\alpha}{n}. \quad (2)$$

При $\varepsilon = 0$ ($\tau = \text{const}$) уравнение (1) становится невозмущенным с интегралом энергии соответственно

$$\ddot{\alpha} + \varphi(\tau, \alpha) = 0, \quad \dot{\alpha}^2 + 2f(\tau, \alpha) = h = \text{const}. \quad (3)$$

Пусть $f(\tau, \alpha)$ по α имеет на периоде по одному максимуму и минимуму. Значит, уравнение $\varphi = 0$ имеет два корня на периоде: $\alpha_c = 0$ и $\alpha_s = \pi$. При $\dot{\alpha} = 0$, $\alpha = \pi$ из (3) находим значение $h = h^*$ на сепаратрисе.

В режиме вращения $\text{sign } \dot{\alpha} = \text{const}$ и α — монотонная переменная со слабой дрожью около средней составляющей $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0 + \omega t$, около $\omega \approx \sqrt{h}$ колеблется $\dot{\alpha}$. В области колебаний $\omega = 0$ вплоть до разделяющей границы. Периоды по t колебаний переменных $\dot{\alpha}$ в области вращений и $\dot{\alpha}$, α в области колебаний равны соответственно

$$T(\tau) = \int_0^{2\pi} (h - 2f)^{-1/2} d\alpha, \quad T(\tau) = 2 \int_0^{\alpha_{\max}} (h - 2f)^{-1/2} d\alpha. \quad (4)$$

Из-за монотонности $\alpha(t)$ в области вращений

$$\int_0^t \varphi(\alpha) dt \approx \int_0^t \varphi(\bar{\alpha}) dt = [f(\bar{\alpha}) - f(\bar{\alpha}_0)] / \omega; \quad (5)$$

здесь вместо $\varphi(\alpha)$ возможна любая периодическая функция без нулевого члена Фурье.

Интегрирование по t (3), (5) дает для области вращений

$$\dot{\alpha} = \omega - f(\bar{\alpha}) / \omega, \quad \alpha = \bar{\alpha} - \Phi(\bar{\alpha}) / \omega^2, \quad \Phi(\bar{\alpha}) = \int^{\bar{\alpha}} f(\alpha) d\alpha, \quad (6)$$

где

$$\omega = \dot{\alpha}_0 + f(\alpha_0)/\omega \approx \sqrt{h}, \quad \bar{\alpha}_0 = \alpha_0 + \Phi(\alpha_0)/\omega.$$

С учетом (5) осредним (3), (6) по t за период обращения $T(\tau)$:

$$\overline{\dot{\alpha}^2} = h, \quad \overline{\dot{\alpha}} = \omega. \quad (7)$$

Из (3) следуют выражения для огибающих семейства $\dot{\alpha}$ в обеих областях и α в области колебаний

$$\tilde{\dot{\alpha}}^2 \pm f_{\max}(\tau) = 0, \quad f(\tau, \bar{\alpha}) = h. \quad (8)$$

В области вращений (6) также дает огибающие семейства $\dot{\alpha}$. Для области колебаний в (3) удобно вместо f, h взять сдвинутые величины $p = f(\tau, \alpha) - f(\tau, 0)$, $h_1 = h - f(\tau, 0)$. Замкнутые фазовые траектории области колебаний по характеру $f(\tau, \alpha)$ можно предполагать выпуклыми и осесимметричными. Тогда можно ввести такую монотонную по t угловую переменную β , что интеграл (3) будет удовлетворяться, если

$$\dot{\alpha} = \sqrt{h_1} \sin \beta, \quad \sqrt{p} = \sqrt{h_1} \cos \beta. \quad (9)$$

Аналогично (7) в области колебаний с учетом (5), (9) получим средние значения за период колебаний

$$\overline{\dot{\alpha}} = \omega = 0, \quad \overline{\dot{\alpha}^2} = \bar{p} = 1/2 h_1. \quad (10)$$

Предположения о характере $f(\tau, \alpha)$ позволяют считать *

$$\bar{p} = 2[f(\tau, \alpha) - f(\tau, 0)] = k f(\tau, 0), \quad k = \text{const}, \quad (11)$$

откуда

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau} = k \frac{\partial f(\tau, 0)}{\partial \tau} = \bar{p} \frac{\partial \ln f(\tau, 0)}{\partial \tau}, \quad |f(\tau, 0)| = f_{\max}. \quad (12)$$

В дальнейшем для получения компактного результата при $\varepsilon > 0$ в области колебаний будем предполагать

$$\varphi_1 = r_0(\tau) + k_1(\tau) p(\tau, \alpha), \quad \varphi_2 = s_0(\tau) + k_2(\tau) \varphi(\tau, \alpha). \quad (12')$$

Возмущенному движению (1) поставим в соответствие соотношение энергии (4), считая в нем τ, h переменными; тогда

$$\dot{h} = 2\varepsilon F, \quad F = -\varphi_2(\tau, \alpha) \dot{\alpha} - \varphi_1(\tau, \alpha) \dot{\alpha}^2 + \partial f(\tau, \alpha) / \partial \tau. \quad (13)$$

Ввиду неавтономности (13) и неустойчивости положения равновесия $\dot{\alpha} = 0$, $\alpha = \pi$ можно не рассматривать малую окрестность последнего. Достаточно проследить критическую траекторию, ведущую в упомянутую окрестность, на конечном интервале t до достижения этой окрестности. Тогда исключив из F переменную $\dot{\alpha}$ с помощью (3), убедимся, что $\partial F / \partial h \sim 1$ вдали от сепаратрисы, а при переходе через нее $\partial F / \partial h \sim 1/\varepsilon$ в течение $\Delta t \sim 1$.

Теорема. Пусть в области $D \in E_n$ при $t \geq 0$ правая часть (13) определена, периодична по α при τ , $h = \text{const}$, $\partial F / \partial h \sim 1$ всюду, кроме $\Delta t \sim 1$ при пересечении сепаратрисы.

Тогда при $t \sim 1/\varepsilon$ остается $\sim \varepsilon$ разность решения (13) и осредненного на конечном интервале, охватывающем переход через сепаратрису. То же верно до сепаратрисы в отношении осреднения (13) за период $T(\tau)$ колебания (аналогично обращения (5)).

* В случае $\varphi(\tau, \alpha) = a(\tau) \tilde{\varphi}(\alpha)$ автоматически выполняется (11).

Доказательство. Перейдем от (13) к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра

$$h-h_0-\varepsilon \int_0^t F_0(\tau, h) d\tau = \varepsilon \Pi, \quad \Pi = \int_0^t \bar{F} dt = \bar{F} - \varepsilon \int_0^t \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial h} F \right) dt, \quad (14)$$

где F_0 — осредненная F по t , входящему в α , при $\tau, h = \text{const}$ на интервале $t^* \sim 1/\varepsilon$, охватывающем переход через сепаратрису; $\bar{F} = F - F_0$; $\bar{F}(t, \tau, h)$ — интеграл от $\bar{F}$ по t , входящему в α , при $\tau, h = \text{const}$ в пределах $0, t$.

Пусть $\bar{h}$ — решение (13) при $\Pi = 0$, тогда $R = h - \bar{h}$ — погрешность осреднения — удовлетворяет уравнению

$$R = \varepsilon \int_0^t [F_0(\tau, h) - F_0(\tau, \bar{h})] d\tau + \varepsilon \Pi. \quad (15)$$

На участке вращения (или колебания) до сепаратрисы осреднение на $[0, t^*]$ совпадает с точностью до $\sim \varepsilon^2$ с осреднением по периоду $T(\tau)$ обращения (или колебания). Значит, функция $\bar{F}$ будет ограничена всюду на $[0, t^*]$. Производные $\bar{F}$, очевидно, будут ограничены вне окрестности сепаратрисы, но последние проходятся быстро. Значит, Π ограничена на $[0, t^*]$. Далее учтем, что $\partial F_0 / \partial h$ ограничена на $[0, t^*]$, кроме малого отрезка, соответствующего прохождению сепаратрисы. Оценивая решение (15), как в (5), методом мажорирования последовательных приближений, убеждаемся, что $R \sim \varepsilon$ при $t \sim 1/\varepsilon$.

Осреднение на интервале $[0, t^*]$ и связанные с ним осреднения по периоду $T(\tau)$ (колебания или обращения) являются промежуточными операциями, удобными для проведения оценки погрешности осреднения, особенно в условиях прохождения через сепаратрису.

Осредним (13) по t в области колебаний с учетом (9) — (12'):

$$\dot{h}_1 = \varepsilon [-r_0(\tau) h_1^{-1/2} k_1 h_1^2 + h_1 \partial \ln f(\tau, 0) / \partial \tau]. \quad (16)$$

В момент перехода в область вращений достигается $\alpha_{\max} = \pm \pi$ (или $h = h^*$ — значение на сепаратрисе), далее учитывается непрерывность $h(t)$, что эквивалентно непрерывности верхней огибающей семейства α .

Рассмотрим линейное уравнение и его интеграл

$$\ddot{\alpha} + a(\tau) \alpha = 0, \quad \dot{\alpha}^2 + a \alpha^2 = h_1, \quad f(\tau, 0) = f_{\max} = a. \quad (17)$$

Из (16) получаем для (17) известный (6) закон изменения амплитуды колебаний

$$h_1 = c \sqrt{a} = a \alpha_{\max}^2, \quad \alpha_{\max} = \sqrt{c} a^{-1/4}.$$

Ввиду свойств (5) — (7) в области вращений до сепаратрисы получим из (13) осредненное по t уравнение

$$\dot{h} = 2\varepsilon [-s_0 \omega - h r_0 + \varphi_{30}], \quad \varphi_3 = -2\varphi_1 f, \quad (18)$$

где s_0, r_0, φ_{30} — нулевые члены рядов Фурье по α для $\varphi_2, \varphi_1, \varphi_3$ соответственно.

В физических системах (7) из-за члена $s_0 \omega$ правая часть (18) не при всяком h_0 обеспечивает убывание h , т. е. возможно непрекращающееся вращение, не переходящее со временем в колебания.

Уравнение (18) легко замыкается, ибо для расчета амплитудных характеристик достаточно взять $\omega \approx \sqrt{h}$, т. е. пренебречь скачком в ω вблизи сепаратрисы. Последний существен для подсчета оборотов и описания процесса колебаний $\dot{\alpha}(t)$.

Вдали от сепаратрисы переменная ω аналогична быстро вращающейся фазе метода Н. Н. Моисеева ⁽³⁾.

Момент перехода в область колебаний определяется из условия аннулирования для семейства $\dot{\alpha}$ нижней огибающей $\tilde{\alpha}_n=0$, далее учитывается непрерывность $h(t)$ или адекватный признак: в момент перехода непрерывна $\tilde{\alpha}_n$ — верхняя огибающая семейства $\dot{\alpha}$, т. е. в области колебаний огибающими семейства $\dot{\alpha}$ будут $(-\dot{\alpha}_n, \dot{\alpha}_n)$.

При $\varepsilon > 0$ продифференцируем по t представление (6) для $\dot{\alpha}$, считая ω , τ переменными, и исключим α с помощью (1); тогда

$$\dot{\omega} = -\varepsilon \omega [\varphi_1 \dot{\alpha} + \varphi_2] / [\omega + f(\bar{\alpha}) / \omega]. \quad (19)$$

Если член $s_0(\tau)$ — нулевой в ряде Фурье для $\varphi_2(\tau, \alpha)$ — ввести в представление $\dot{\alpha}$, тогда вместо (6), (19) будет

$$\dot{\alpha} = \omega - \int_0^t s_0 dt - f(\bar{\alpha}) / \omega, \quad \dot{\omega} = -\varepsilon \omega [\varphi_1 \dot{\alpha} + \varphi_2 - s_0] / (\omega + f(\bar{\alpha}) / \omega). \quad (20)$$

Из (20) находим выражения верхней и нижней огибающих семейства $\dot{\alpha}$:

$$\tilde{\alpha}_n = \omega - \int_0^t s_0 dt + f_{\max} / \omega, \quad \tilde{\alpha}_n = \omega - \int_0^t s_0 dt - f_{\max} / \omega. \quad (21)$$

Обороты траекторий, достигающих сепаратрису, надо подсчитывать с учетом скачка $\omega(\tau)$ на последнем обороте перед сепаратрисой, что в среднем сводится к следующему

$$\bar{\alpha} = \omega - \varepsilon \int_0^t s_0(\tau) dt - f_{\max} / (2\omega), \quad \bar{\alpha} = \alpha_0 + \int_0^t \bar{\alpha} dt. \quad (22)$$

Здесь кроется возможность уточнения момента перехода в область колебаний.

Автор благодарит А. А. Шилова за полезные обсуждения.

Центральный аэрогидродинамический институт
им. Н. Е. Жуковского

Поступило
12 XI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. А. Дородницын, ПММ, т. 11, № 3, 313 (1947). ² Ю. А. Митропольский, Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, «Наука», 1964. ³ Н. Н. Моисеев, Асимптотические методы нелинейной механики, «Наука», 1969. ⁴ В. М. Волосов, Б. И. Моргунов, Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем, МГУ, 1971. ⁵ В. В. Ларичева, ДАН, т. 198, № 6, 1269 (1971). ⁶ А. А. Дородницын, УМН, т. 7, № 6 (52), 3 (1952). ⁷ В. В. Ларичева, А. А. Шилов, Космические исследования, т. 7, № 1, 61 (1969).