

А. А. ЛУШНИКОВ, В. И. СМЕРНОВ

СТАЦИОНАРНАЯ КОАГУЛЯЦИЯ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ АТМОСФЕРНЫХ АЭРОЗОЛЕЙ ПО РАЗМЕРАМ

(Представлено академиком Е. К. Федоровым 28 I 1974)

Многими исследователями, начиная с Юнге ^(1, 2), найдено, что распределения частиц атмосферных аэрозолей по размерам в широком интервале хорошо аппроксимируются степенной функцией $\varphi(r) = br^{-\nu}$, где r — радиус частиц, b и ν — постоянные, причем ν варьирует от 2 ⁽³⁾ до 6 ⁽⁴⁾. Предпринятые до сих пор попытки объяснения степенных распределений нельзя считать удачными. Применение метода размерностей в задаче о коагуляции аэрозоля ⁽⁵⁾ неубедительно из-за произвола в выборе характерных параметров. Идея о росте частиц за счет среды ⁽⁶⁾ ведет к степенному распределению лишь при искусственном допущении о формуле роста частиц. Гипотеза о перемешивании аэрозолей, поступающих из независимых источников ⁽⁷⁾, не получила математической формулировки. Численные расчеты броуновской коагуляции ⁽⁸⁾ не привели к определенным выводам о форме образующихся распределений.

В настоящей работе будет показано, что степенные распределения возникают при определенных условиях в процессе коагуляции аэрозоля. В атмосфере непрерывно возникают весьма мелкие частицы (при химических и фотохимических реакциях), и одновременно из нее выводятся наиболее крупные аэрозольные частицы (за счет выпадения или участия в процессах осадкообразования). Предполагая, что крупные частицы появляются при объединении мелких, запишем стационарное уравнение коагуляции в виде

$$I_g - B_g - C_g \sum_{n=1}^{\infty} K(g, n) C_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{g-1} K(g-n, n) C_{g-n} C_n = 0, \quad (1)$$

где C_n — концентрация частиц с массой в n раз больше минимальной, принимаемой за единицу, K — коэффициент коагуляции, $I_g(B_g)$ — источник (сток) частиц.

Нас интересует асимптотическое решение C_g ($g \gg 1$), почти не зависящее от формы источника и стока. Поэтому предполагаем, что $I_g < \text{const} \cdot \exp(-g/g_0)$ и что сток действует только при $g > G$. Если

$$\sum_{n=G}^{\infty} K(g, n) C_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} K(g, n) C_n, \quad (2)$$

то можно положить $\tilde{B}_g = 0$.

Введем производящую функцию F комплексного переменного z : $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$. Очевидно, $C_n = (1/n!) (d^n F / dz^n) |_{z=0}$, но для анализа асимптотики C_n удобнее формула (9):

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c F(z) z^{-n-1} dz, \quad (3)$$

где c — окружность с центром в точке $z=0$.

Точка $z=1$ является особой точкой $F(z)$. Для доказательства умножим (1), где $B_s=0$, на g^2 и просуммируем по g от 1 до ∞ . Легко находится, что суммы $\sum_{g, n=1}^{\infty} g^2 K(g, n) C_g C_n$ расходятся. Мажорируя K функцией $\sum_{s=1}^p B_s g^r n^r$,

нетрудно показать, что $\sum_{g=1}^{\infty} C_g g^{2+\max r_s}$ расходится, что эквивалентно расходимости производных $F(z)$ более высокого порядка, чем $2(\max r_s + 2)$ в точке $z=1$. Утверждение доказано. Выведем уравнение для F из (1). Ограничимся $K = g^\alpha n^\beta + g^\beta n^\alpha$, где $|\alpha|, |\beta| < 1, \alpha + \beta = \lambda, 0 \leq \lambda < 1$. Случай $K = \sum_s A_s (g^{\alpha_s} n^{\beta_s} + g^{\beta_s} n^{\alpha_s})$ не является существенно новым, если $\alpha_s + \beta_s = \lambda$. Случай $K = \psi(g)\psi(n)(g^\alpha n^\beta + g^\beta n^\alpha)$, где ψ — произвольная функция, сводится к рассматриваемому при введении $M_n = \psi(n)C_n$.

Нетрудно убедиться в том, что выполняется

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha C_n z^n = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^z \frac{(dF/dx) dx}{[\ln(z/x)]^\alpha} = F_\alpha(z). \quad (4)$$

Из (1) с помощью (4) находим уравнение для F :

$$\psi(z) + [F_\alpha(z) - F_\alpha(1)][F_\beta(z) - F_\beta(1)] = 0, \quad (5)$$

где $\psi(z) = \Phi(z) - F_\alpha(1)F_\beta(1)$, $(\psi(1)=0)$, $\Phi(z) = \sum_{g=1}^{\infty} I_g z^g$.

Проанализируем особую точку $F(z)$ при $z=1$. Разложим $\psi(z)$ в ряд $\psi(z) = a_1(z-1) + a_2(z-1)^2 + \dots$ ($a_1, a_2, \dots$ — коэффициенты). Ищем $F(z)$ в виде $F(z) = F(1) + A_1(z-1)^\gamma + h(z)$, где A_1 — постоянная, $\gamma > \max(\alpha, \beta)$ (иначе $F_\alpha(1)$ или $F_\beta(1)$ становятся неограниченными) и $h(z)$ содержит лишь степени $(z-1)$ больше 1. Подставим $F(z)$ в (5) и приравняем показатели степеней. Член $h_\alpha(z) - h_\alpha(1)$ (функция $h_\alpha(z)$ аналогична $F_\alpha(z)$) разложим в ряд. Воспользуемся тем, что вблизи точки $z=1$

$$\begin{aligned} \int_0^z \frac{dx}{(1-x)^{1-\gamma} [\ln(z/x)]^\alpha} - \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1-\gamma} [\ln(z/x)]^\alpha} &\simeq \\ &\simeq - \frac{\gamma}{(\gamma-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\gamma+\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} (1-z)^{\gamma-\alpha}. \end{aligned} \quad (6)$$

Приравнивание показателей степеней ведет к $\gamma = (1+\alpha+\beta)/2 = (1+\lambda)/2$. Для определения C_n из (3) удобно деформировать контур s так, чтобы он охватывал точку $z=1$ и уходил в ∞ сверху и снизу вдоль положительной полуоси. Получаем

$$C_n \sim n^{-(3+\lambda)/2}, \quad \varphi(r) \sim r^{-(5+3\lambda)/2}, \quad (7)$$

где $\varphi(r)$ — распределение частиц сферической формулы по радиусу r . В силу условия $I_g < \text{const} \cdot \exp(-g/g_0)$ особые точки $\Phi(z)$ расположены при $|z| > 1$ и не влияют на результат. Легко убедиться, что (2) выполнено. т. е. форма стока не влияет на C_n , если $|\alpha-\beta| < 1$. Если в $K(g, n)$ входит произведение $\psi(g)\psi(n)$, то

$$C_n \sim [1/\psi(n)] n^{-(3+\lambda)/2}, \quad \varphi(r) \sim \{1/\psi[(4/3)\pi r^3]\} r^{-(5+3\lambda)/2}, \quad (8)$$

где ρ — плотность частиц.

Величины $\varepsilon_1 = 1 - \lambda > 0$ и $\varepsilon_2 = 1 - |\alpha - \beta|$ могут быть сколь угодно малыми, так что (8) имеет смысл и при $\lambda=1$ или (и) $|\alpha - \beta| = 1$.

При $K=1$ можно найти все C_n ($n=1, 2, \dots$) из $C_n = (1/n!) \times (d^n F/dz^n)|_{z=0}$, так как $F(z)$ находится из уравнения $2\Phi(z) + F^2(z) - F(z)F(1) = 0$. Если источник дает только частицы единичной массы ($I_g = p\delta_{g1}$, δ_{ik} — символ Кронекера, p — постоянная), то

$$C_1 = \sqrt{2p}/2, \quad C_n = \sqrt{2p}(2n-3)!!/2^n n! \rightarrow \sqrt{p/2\pi n}^{-1/2} \quad (9)$$

в согласии с (7) при $\lambda=0$. Легко показать, что $N = \sum_{n=1}^{\infty} C_n = \sqrt{2p}$ (N — концентрация).

Попытаемся найти степенную асимптотику C_n , учитывая только взаимодействия крупных частиц с мелкими. Из (1) для $g_0 \ll g < G$ находим

$$C_g = {}^{1/2} \sum_{n=1}^{g-1} K(g-n, n) C_{g-n} C_n \left[\sum_{n=1}^{\infty} K(g, n) C_n \right]^{-1}. \quad (10)$$

Если существенны лишь члены с индексами $n \ll g$, то разложение в ряды при

$$[n/K(g, n)][\partial K(g, n)/\partial n] \rightarrow 0, \quad (n/C_g)(\partial C_g/\partial g) \rightarrow 0 \quad (11)$$

($n=1, 2 \dots g/2$) приводит к уравнению непрерывного роста частиц

$$\sum_{n=1}^{\infty} n C_n (\partial/\partial g) [K(g, n) C_g] = 0. \quad (12)$$

Степенные функции C_n не допускают перехода от (10) к (12), так как для них не выполняются (11). Таким образом, для довольно широкого класса K , рассмотренного выше, стационарная коагуляция происходит при существенном взаимодействии частиц из широкого интервала размеров.

Рассмотрим формирование распределений по размерам частиц атмосферных аэрозолей.

Коэффициент броуновской коагуляции в кинетическом режиме ($\text{Kn}/\alpha \gg 1$) равен ^(10, 11)

$$K_1(g, n) = \alpha \pi^{1/2} \left(\frac{3}{4\rho} \right)^{2/3} \left(\frac{8kT}{\pi} \right)^{1/2} (g^{1/3} + n^{1/3})^2 (g^{-1} + n^{-1})^{1/2}, \quad (13)$$

где ρ — плотность частиц, α — вероятность слияния или слипания, Kn — число Кнудсена ($\text{Kn} = l_r/(r_1 + r_2)$), l_r — относительный свободный пробег, r_1 и r_2 — радиусы двух частиц. Согласно ⁽¹¹⁾, $l_r = 3D_r/\bar{v}_r$, где $D_r = D_1 + D_2$ — коэффициент относительной диффузии, $\bar{v}_r$ — средний модуль относительной скорости в тепловом движении. Имеем $\lambda = 1/6$, однако $|\alpha - \beta| = 7/6 > 1$. Поэтому в данном случае степенное распределение, не зависящее от формы функции стока, не формируется.

Коэффициент броуновской коагуляции в диффузионном режиме ($\text{Kn}/\alpha \ll 1$) равен ⁽¹⁰⁾:

$$K_2(g, n) = \frac{2kT}{3\eta} (g^{1/3} + n^{1/3}) (g^{-1/2} + n^{-1/2}), \quad (14)$$

где η — вязкость среды. Имеем $\lambda=0$, и

$$\varphi_2(r) \sim r^{-5/2}. \quad (15)$$

Коэффициент броуновской коагуляции в конвективно-диффузионном режиме ($\text{Kn}/\alpha \ll 1$, $\text{Re} \ll 1$, $\text{Pe} \gg 1$, $\text{Stk} \ll 1$) ⁽¹²⁾

$$K_3(g, n) = {}^{3/2} \pi \alpha \left(\frac{3}{4\rho} \right)^{4/3} g^{2/3} n^{2/3}, \quad (16)$$

где a — постоянная из стоксовой скорости падения частиц $v(r) = ar^2$; Re , Pe и Stk — числа Рейнольдса, Пекле и Стокса; $Re = v(r_1)r_1/\nu$, $Pe = v(r_1)r_1/D_2$, $Stk = v(r_1)\tau_2/r_1$, где r_1 — радиус большей частицы ($r_1 \gg r_2$), ν — кинематическая вязкость, $\tau_2 = 2\rho r_2^2/9\eta$. Из (8) находим

$$\varphi_3(r) \sim r^{-9/2}. \quad (17)$$

Коэффициент гравитационной коагуляции, взятый в упрощенной форме, равен (13)

$$K_4 \simeq \text{const}(g+n). \quad (18)$$

Имеем $\lambda=1$ и

$$\varphi_4(r) \sim r^{-4}. \quad (19)$$

Найдем пределы применимости формул (15), (17) и (19). На рис. 1 показаны изолинии $Kn=1$, $Re=1$, $Pe=1$, 10, 100 и 1000, $Stk=1$ (в координатах r_1, r_2) для различных высот над уровнем моря (0 и 10 км в стандартной атмосфере) (14), для частиц

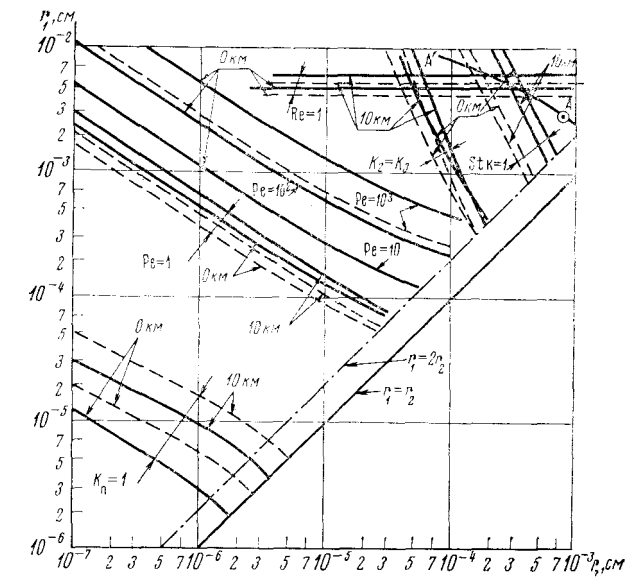


Рис. 1

плотностью $\rho=1 \text{ гсм}^{-3}$ (сплошные линии) и 3 гсм^{-3} (пунктир). Показаны также изолинии $K_2=K_3$ и $K_3=K_4$ (линия AA'). В последнем случае K_4 — аэродинамический коэффициент коагуляции (15), более точный, чем (18). Однако из-за отсутствия необходимых данных удалось найти лишь одну точку (A).

Получение в теории стационарной коагуляции асимптотических степенных распределений с показателями степени (2,5–4,5), близкими к наблюдаемым величинам (2–6), может означать, что теория в основном верно отражает существенные черты процесса формирования атмосферного аэрозоля. В дальнейшем следует учесть пространственную неоднородность, турбулентность атмосферы и др. факторы. Представляют значительный интерес новые измерения формы распределений частиц в широком диапазоне размеров.

Центральная аэрологическая
обсерватория

Поступило
24 I 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Е. Junge, Tellus, v. 5, № 4, 1 (1953). ² С. Е. Junge, Air Chemistry and Radioactivity, N. Y.—London, 1963; пер. Х. Юнге, Химический состав и радиоактивность атмосферы. М., «Мир», 1965. ³ С. Л. Саркисов, Г. В. Степанов, В. Г. Хоргуани, Тр. Высокотер. геофизич. ин-та, в. 13, 88 (1969). ⁴ Б. Г. Андреев, Тр. VIII Всесоюз. конф. по физ. облаков и активным воздействиям, Л., 1970, стр. 93. ⁵ S. K. Friedlander, J. Meteorol., v. 17, № 5, 479 (1960). ⁶ J. R. Brock, Atmosph. Environ., v. 5, № 10, 833 (1971). ⁷ C. Junge, Proc. VII Intern. Conf. on Condensation and Ice Nuclei. Prague and Vienna, 1969, Suppl. Volume, 1971, p. 31. ⁸ P. B. Storebo, Geofysiske Publikasjoner, v. 28, № 4, 101 (1972). ⁹ М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабар, Методы теории функций комплексного переменного, М., 1958, стр. 71. ¹⁰ Н. А. Фукс, Механика аэрозолей, Изд. АН СССР, М., 1955, стр. 262. ¹¹ В. И. Смирнов, Скорость коагуляционного и конденсационного роста частиц аэрозолей, Тр. Центральн. аэрологич. обсерв., в. 92, 1969, стр. 40. ¹² В. М. Волощук, Ю. К. Горматюк, Тр. Ин-та эксп. метеорол., в. 23, 65 (1971). ¹³ А. М. Головин, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 5, 783 (1963). ¹⁴ Таблица стандартной атмосферы, ГОСТ 4401–64, Гос. комитета стандартов, мер и измер. приборов СССР, М., 1964. ¹⁵ М. Н. Davis, Intern. Cloud Physics Conference, London, Abstr., 1972, p. 31.