

Ю. З. МИРОПОЛЬСКИЙ

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ С ПРИМЕНЕНИЕМ К ВНУТРЕННИМ ГРАВИТАЦИОННЫМ ВОЛНАМ И ВОЛНАМ РОССИИ

(Представлено академиком Л. М. Бреховских 18 III 1975)

Если амплитуда нелинейной волны, распространяющейся в диспергирующей среде, невелика, то основным осредненным нелинейным эффектом является зависимость ее частоты ω от квадрата амплитуды a . В этом случае в изотропных средах нелинейное дисперсионное соотношение имеет вид $\omega = \omega(k^2, a^2)$, где k — модуль волнового вектора $\mathbf{k}$ (в общем случае многомерного).

Как известно (см., например, ^(1, 2)), только по виду нелинейного дисперсионного соотношения можно судить о неустойчивости распространяющейся стационарной волны. При $(\partial u / \partial k) \alpha < 0$ волна неустойчива относительно продольных, а при $\alpha < 0$ — относительно поперечных возмущений ($u = (\partial \omega / \partial k) |_{a^2=0}$ — групповая скорость в линейном приближении, $\alpha = (\partial \omega / \partial (a^2)) |_{a^2=0}$). Эти критерии впервые были установлены Лайтхиллом ⁽³⁾. Однако часто среда, в которой распространяются волны, не является изотропной (такие примеры представлены ниже), т. е. дисперсионное соотношение зависит от отдельных компонент волнового вектора $k_j (\omega = \omega(k_j, a^2), j=1, \dots, n)$; поэтому представляет интерес обобщить критерии неустойчивости Лайтхилла на анизотропный случай.

1. Считая амплитуду a достаточно малой, разложим нелинейное дисперсионное соотношение для анизотропной среды $\omega = \omega(k_j, a^2)$ в ряд:

$$\omega(k_j, a^2) = \omega^{(0)}(k_j) + \alpha a^2 + O(a^4), \quad \alpha = (\partial \omega / \partial (a^2)) |_{a^2=0}, \quad (1)$$

где функция $\omega^{(0)}(k_j)$ определяет закон дисперсии в линейном приближении. Пусть волны мало отличаются от линейных и их амплитуда $a = a(x_j, t)$ и фаза $\Theta = \Theta(x_j, t)$ являются функциями координат x_j и времени t , т. е. волновой пакет имеет вид

$$\Phi(x_j, t) = a(x_j, t) \exp \{i\Theta(x_j, t)\}.$$

Тогда общую фазу можно представить в виде

$$\Theta(x_j, t) = S(x_j, t) + \varphi(x_j, t), \quad (2)$$

где S — фаза волны в линейном приближении, а φ — нелинейная добавка к фазе порядка квадрата амплитуды. Если все величины мало изменяются на расстояниях порядка длины волны и на временах порядка периода волны, то так же, как в геометрической оптике, можно положить

$$\omega(x_j, t) = -\Theta_t = -S_t - \varphi_t = \omega^{(0)}(x_j, t) - \varphi_t, \quad (3)$$

$$k_j(x_j, t) = \Theta_{x_j} = S_{x_j} + \varphi_{x_j} = k_j^{(0)}(x_j, t) + \varphi_{x_j}.$$

Если в линейном приближении задана монохроматическая волна (а не волновой пакет, как в нашем случае), то $-S_t = \omega^{(0)} = \text{const}$, $S_{x_j} = k_j^{(0)} = \text{const}$. Подставляя (3) в (1) и ограничиваясь членами второго порядка по a и φ_{x_j}/S_{x_j} , получим

$$\varphi_t + u_j \varphi_{x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_j}{\partial k_i} \varphi_{x_i} \varphi_{x_j} + \alpha a^2 = 0, \quad (4)$$

где $u_j = \partial \omega^{(0)} / \partial k_j$ — компоненты групповой скорости.

В качестве второго уравнения возьмем уравнение переноса энергии, которое можно написать в виде ^(1, 2)

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(V_j a^2) = 0, \quad (5)$$

где V_j — компоненты скорости переноса энергии, в нашем случае равные $V_j(k_j, a^2) = V_j(k_j, 0) = u_j(k_j(x_j, t))$, т. е. компонентам групповой скорости в линейном приближении. Далее, учитывая, что k_j определяются выражением (3), с принятой степенью точности получим $V_j = u_j + \sum_j (\partial u_j / \partial k_j) \varphi_{x_j}$;

уравнение (5) примет вид

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left[u_j + \frac{\partial u_j}{\partial k_j} \varphi_{x_j} \right] a^2 \right\} = 0. \quad (6)$$

Уравнения (4), (6) составляют замкнутую систему, определяющую эволюцию амплитуды и фазы нелинейной волны в анизотропной диспергирующей среде в адиабатическом приближении. Исследуем уравнения (4), (6). Предположим, что на линейный волновой пакет, имеющий волновые числа $k_j^{(0)}(x_j, t)$ и амплитуду $a_0(x_j, t)$, наложено малое возмущение, т. е. $a = a_0 + A$, где $A \ll a_0$ и $\varphi_{x_j} \ll k_j^{(0)}$. Тогда, линеаризуя (4), (6) относительно A и φ_{x_j} , получим

$$\varphi_t + u_j \varphi_{x_j} + \alpha a_0^2 + 2\alpha a_0 A = 0; \quad (7)$$

$$2[a_0 A]_t + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[2a_0 u_i A + \frac{\partial u_i}{\partial k_j} \varphi_{x_j} a_0^2 \right] = 0. \quad (8)$$

При записи (8) учитывалось, что амплитуда линейного волнового пакета в приближении геометрической оптики удовлетворяет уравнению переноса энергии вида

$$\frac{\partial a_0^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [u_j a_0^2] = 0. \quad (9)$$

Коэффициенты системы уравнений (7), (8) суть медленно меняющиеся функции координат и времени, поэтому для достаточно коротковолновых и высокочастотных возмущений их можно считать локально постоянными (это выполняется точно, если в линейном приближении задана монохроматическая волна)*. Тогда, переопределяя фазу $\Psi = \varphi + \alpha a_0^2 t$, из (7), (8) получим

$$\Psi_t + u_j \Psi_{x_j} + 2\alpha a_0 A = 0; \quad (10)$$

$$A_t + u_j A_{x_j} + \frac{1}{2} a_0 \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial k_j} \Psi_{x_j x_j} = 0. \quad (11)$$

Система (12), (13) имеет решения вида $\Psi = \Psi_0 \exp\{i(\kappa_j x_j - \sigma t)\}$, $A = A_0 \exp\{i(\kappa_j x_j - \sigma t)\}$ при выполнении дисперсионного соотношения

$$\sigma = \kappa_j u_j \pm |a_0| \Delta^{1/2}, \quad \Delta = \sum_j \alpha \kappa_j^2 \frac{\partial u_j}{\partial k_j}. \quad (12)$$

Из (14) следует, что нелинейная волна устойчива при $\Delta > 0$ и неустойчива в противоположном случае. В изотропной среде, когда имеется лишь одна компонента групповой скорости (модуль), этот критерий переходит в критерий Лайтхилла.

2. В работе ⁽⁴⁾ рассматривались слабонелинейные короткие внутренние гравитационные волны в неограниченной стратифицированной жид-

* Заметим, что при специальном виде возмущений устойчивость волны по отношению к ним не означает устойчивости в целом. Если же эти возмущения неограниченно растут, можно говорить о неустойчивости волны.

кости; для таких волн было получено нелинейное дисперсионное соотношение

$$\omega = \Omega^{1/2} k_1 (k_1^2 + k_2^2)^{-1/2} + \alpha a^2 + O(a^4); \quad (13)$$

$$\alpha = \Omega^{1/2} k_1 (k_1^2 + k_2^2)^{-1/2} \{ 3/4 \Omega_{xx_2} \Omega^{-1/2} - 5/3 \Omega_{x_2}^2 \Omega^{-3/2} \}; \quad (14)$$

здесь k_1 , k_2 — компоненты волнового вектора $\mathbf{k}$ по продольной x_1 и вертикальной поперечной оси x_2 соответственно; $\Omega(x_2)$ — квадрат частоты Брента — Вайсяля; зависимость всех параметров от x_1 и x_2 предполагается медленной ⁽⁴⁾.

Компоненты u_1 , u_2 групповой скорости по продольной и поперечной координатам имеют вид

$$u_1 = \Omega^{1/2} k_2^2 (k_1^2 + k_2^2)^{-3/2}, \quad u_2 = -\Omega^{1/2} k_1 k_2 (k_1^2 + k_2^2)^{-3/2}. \quad (15)$$

Вычисляя Δ при помощи (13) — (15), получим

$$\Delta = \tilde{\alpha} \Omega k_1^2 (k_1^2 + k_2^2)^{-3} [(2k_2^2 - k_1^2) \kappa_2^2 - 3k_2^2 \kappa_1^2], \quad (16)$$

где $\tilde{\alpha} = 3/4 \Omega_{xx_2} \Omega^{-1/2} - 5/3 \Omega_{x_2}^2 \Omega^{-3/2}$. Из (16) видно, что при $\tilde{\alpha} < 0$ (что почти всегда выполняется для типичных океанских распределений $\Omega(x_2)$) волны будут устойчивы к чисто продольным возмущениям ($\kappa_2 = 0$) и неустойчивы к чисто поперечным ($\kappa_1 = 0$), если $k_1^2 < 2k_2^2$. Если же $k_2^2 > 2k_1^2$, то при $\tilde{\alpha} < 0$ $\Delta > 0$ и растущих возмущений не будет.

Удобно ввести полярные координаты: $k_1 = k \cos \vartheta$, $k_2 = k \sin \vartheta$, $k = |\mathbf{k}|$; $\kappa_2 = \kappa \sin \nu$, $\kappa_1 = \kappa \cos \nu$, $\kappa = |\boldsymbol{\kappa}|$, где ϑ и ν — углы между векторами соответственно $\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\kappa}$ и осью x_1 . Тогда (16) примет вид

$$\Delta = \tilde{\alpha} \Omega \cos^4 \vartheta \cos^2 \nu \frac{\kappa^2}{k^2} \{ (2 \operatorname{tg}^2 \vartheta - 1) \operatorname{tg}^2 \nu - 3 \operatorname{tg}^2 \vartheta \}; \quad (17)$$

знак Δ определяется знаком произведения $\tilde{\alpha} \delta$, где $\delta = (2 \operatorname{tg}^2 \vartheta - 1) \operatorname{tg}^2 \nu - 3 \operatorname{tg}^2 \vartheta$.

На рис. 1 изображена нейтральная кривая $\delta = 0$ в плоскости ν , ϑ . Область неустойчивости при $\tilde{\alpha} < 0$ соответствует площади внутри сплошной кривой, обозначенной знаком $-$. При $\tilde{\alpha} > 0$ области неустойчивости и устойчивости меняются местами.

волны с почти горизонтальным волновым вектором $0 \leq \vartheta \leq 35^\circ$ к возмущениям устойчивы, а в области $35^\circ \leq \vartheta \leq 145^\circ$ неустойчивы к возмущениям, имеющим направление волновых векторов в пределах от 51 до 129° , причем с ростом ϑ область направлений неустойчивых возмущений расширяется. Исключение составляет точка $\vartheta = \pi/2$: при $\vartheta = \pi/2$, как следует из (17), $\Delta = 0$ и, таким образом, волна с вертикальным волновым вектором является нейтрально устойчивой.

3. Рассмотрим слабонелинейные баротропные бездивергентные волны Россби, распространяющиеся на фоне медленно меняющегося среднего зонального потока $U = U(x_2)$ (ось x_1 направлена на восток, x_2 — на север). Дисперсионное соотношение для таких волн имеет вид

$$\omega = k_1 U(x_2) - \frac{k_1 \beta}{k_1^2 + k_2^2} [1 + \tilde{\alpha} a^2] + O(a^4), \quad (18)$$

где $\beta = df/dx_2$ (f — параметр Кориолиса).

Подобная задача решалась в работе ⁽⁵⁾, по результатам которой в принципе может быть вычислена величина $\tilde{\alpha}$, причем, основываясь на резуль-

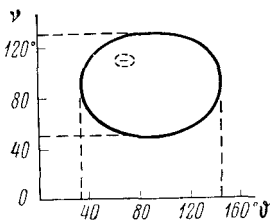


Рис. 1. Нейтральная кривая $\delta = 0$ в плоскости ν , ϑ . Область неустойчивости при $\tilde{\alpha} < 0$ соответствует площади внутри сплошной кривой, обозначенной знаком $-$. При $\tilde{\alpha} > 0$ области неустойчивости и устойчивости меняются местами

татах, полученных в (5), можно показать, что $\tilde{\alpha}$ зависит только от характеристик среднего потока и при $U=0$ обращается в нуль.

Компоненты групповой скорости u_1, u_2 по осям x_1 и x_2 имеют вид

$$u_1 = U - \beta (k_2^2 - k_1^2) (k_1^2 + k_2^2)^{-2}, \quad u_2 = 2\beta k_1 k_2 (k_1^2 + k_2^2)^{-2}. \quad (19)$$

Вычисляя Δ при помощи (18), (19) и учитывая, что $\partial u_1 / \partial k_1 = -\partial u_2 / \partial k_2$, получим

$$\Delta = 2\tilde{\alpha}\beta^2 k_1^2 (k_1^2 + k_2^2)^{-4} \{ (\kappa_2^2 - \kappa_1^2) (k_1^2 - 3k_2^2) \}, \quad (20)$$

или в полярных координатах $\{k, \vartheta\}$; $\{\kappa, \nu\}$, где ϑ и ν — углы векторов $\mathbf{k}$ и $\boldsymbol{\kappa}$ с осью x_1 ,

$$\Delta = 2\tilde{\alpha}\beta^2 k^{-4} \kappa^2 \operatorname{ctg}^2 \vartheta \{ (\sin^2 \nu - \cos^2 \nu) (\operatorname{ctg}^2 \nu - 3) \}. \quad (21)$$

Из (21) видно, что при $|\nu| = \pi/4$ ($\kappa_1^2 = \kappa_2^2$) волны Россби, распространяющиеся под любым углом, являются нейтральными по отношению к возмущениям. Из (21) видно, что при произвольном ν волны, распространяющиеся под углами $|\vartheta| = \pi/6, \pi/2$, также являются нейтральными. При $\tilde{\alpha} > 0$ волны, распространяющиеся под углами $|\vartheta| < \pi/6$, неустойчивы по отношению к относительно поперечным ($\nu > \pi/4$) возмущениям, а при $\pi/2 > |\vartheta| > \pi/6$ — по отношению к продольным ($\nu < \pi/4$). Если $\tilde{\alpha} < 0$, картина изменяется на обратную. Как следует из (21), величина $|\Delta|$ имеет максимумы при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = 52^\circ$; такие волны имеют наибольший инкремент роста.

Оценки показывают, что скорость нарастания неустойчивого возмущения весьма велика. Так, при $k \sim 2\pi/100$ км возмущения с $\kappa \sim 2\pi/100$ км возрастают в e раз за время порядка нескольких периодов волны (при $\vartheta = 52^\circ$). Таким образом, за исключением особых случаев $\vartheta = \pi/6, \pi/2$, волны Россби являются неустойчивыми к тем или иным возмущениям вне зависимости от знака величины $\tilde{\alpha}$, определяемым поведением среднего течения $U(x_2)$.

В заключение заметим, что полученные результаты справедливы, если $\kappa_j \gg L_j^{-1}$, где L_j — характерный масштаб изменения параметров волны (входящих в дисперсионное соотношение) по осям x_j . Если возмущения являются длинноволновыми, требуется специальное исследование, основанное на уравнениях (7), (8).

Автор выражает глубокую благодарность А. И. Леонову за полезное обсуждение настоящей работы.

Институт океанологии им. П. П. Ширшова
Академии наук СССР
Москва

Поступил
21 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. Б. Кадомцев, В. И. Карпман, УФН, т. 103, в. 2 (1971). ² В. И. Карпман, Нелинейные волны в диспергирующих средах, «Наука», М., 1973. ³ М. J. Lighthill, J. Inst. Math. Appl., v. 1, № 1 (1965). ⁴ А. И. Леонов, Ю. З. Миропольский, Изв. АН СССР, сер. Физ. атм. и океана, т. 11, № 12 (1975). ⁵ V. D. Larichev, G. M. Reznik, Mode Hot Line News, v. 71 (1975).