

УДК 517.54

МАТЕМАТИКА

В. М. МИКЛЮКОВ

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ОБЛАСТИ НА ПОЛОСУ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 11 II 1975)

1. Пусть C_z — плоскость комплексного переменного $z=x+iy$, $\bar{C}_z$ — плоскость, пополненная бесконечно удаленной точкой. Пусть A и B — одностовязные области в $\bar{C}_z$ с границами, состоящими более чем из двух точек, и пусть $z_0 \in A \cap B$ — произвольная точка. Пусть $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ — последовательность континуумов, содержащих точку z_0 и содержащихся как в области A , так и в области B . Предположим, что все K_n таковы, что $A_n = A \setminus K_n$, $B_n = B \setminus K_n$ суть двустовязные области, и обозначим через $M(A_n)$ и $M(B_n)$ их модули относительно семейств кривых, разделяющих граничные компоненты ⁽¹⁾.

Лемма 1. Если диаметры континуумов K_n стремятся к нулю, то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (M(A_n) - M(B_n)) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R_A}{R_B}, \quad (1)$$

где R_A и R_B — внутренние конформные радиусы областей A и B относительно точки $z=z_0$.

Данная лемма представляет собой обобщение известного утверждения о связи между приведенным модулем области и внутренним конформным радиусом ⁽¹⁾.

2. Пусть G — произвольная одноствязная область в $\bar{C}_z$, G' — подобласть области G , e' — простой конец, входящий в G . Будем говорить, что подобласть G' примыкает к простому концу e' , если для любой последовательности $\{z_n\}$ точек области G , сходящейся к простому концу e' , существует номер N такой, что при всех $n > N$ точки z_n принадлежат подобласти G' .

Зафиксируем произвольно три различных простых конца e' , e_0 и e'' , входящих в область G ,* и рассмотрим произвольную одноствязную подобласть G' области G , примыкающую к e' . Обозначим через $\partial_G G'$ границу подобласти G' относительно G . Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ — произвольная цепь сечений области G , определяющая простой конец e' . Пусть Γ_n — множество всех локально спрямляемых простых дуг Жордана в области G , разделяющих дугу γ_n и «дугу» простых концов $e_0 e''$, не содержащую на себе простого конца e' , и пусть Δ_n — множество всех локально спрямляемых дуг в подобласти G' , разделяющих γ_n и $\partial_G G'$. Поскольку подобласть G' примыкает к e' , то для достаточно больших n множества Γ_n и Δ_n не пусты. Обозначим через $M(\Gamma_n)$ и $M(\Delta_n)$ модули данных семейств кривых.

Лемма 2. Существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (M(\Gamma_n) - M(\Delta_n)), \quad (2)$$

не зависящий от выбора цепи сечений $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$, определяющей простым концом e' .

* Простые концы e' , e_0 и e'' считаем расположенными в порядке положительного обхода границы области G .

Мы будем называть предел (2) приведенным модулем подобласти G' относительно простого конца e' и области G с отмеченными простыми концами e_0 и e'' ; будем обозначать этот предел символом $k(G')$.

Пусть $w=f(z)$ — однолиственное конформное отображение области G на верхнюю полуплоскость $H^+=\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$, нормированное условиями

$$f(e')=0, \quad f(e_0)=1, \quad f(e'')=\infty. \quad (3)$$

Обозначим через A наибольшую из односвязных областей в C_w , содержащих 0, симметричных относительно вещественной оси и совпадающих с областью $j(G')$ в H^+ .

Лемма 3. Справедливо соотношение

$$k(G') = \frac{1}{\pi} \ln \frac{4}{R_A}, \quad (4)$$

где R_A — внутренний конформный радиус области A относительно точки $w=0$.

Доказательства данной и предыдущей лемм базируются на лемме 1.

Если G'' — произвольная односвязная подобласть области G , примыкающая к простому концу e'' , то имеет смысл говорить о приведенном модуле $k(G'')$ подобласти G'' относительно простого конца e'' и области G с отмеченными простыми концами e' и e_0 .

Лемма 4. Предположим, что подобласти G' и G'' не налегают, т. е. $G' \cap G'' = \emptyset$. Тогда.

$$k(G') + k(G'') \geq \frac{1}{\pi} \ln 16. \quad (5)$$

Доказательство вытекает из леммы 3 и известного неравенства, связывающего конформные радиусы пары неналегающих областей ⁽¹⁾.

Сделаем замечание, касающееся возможности равенства в (5). Прежде всего отметим, что если область $G=H^+$ и $e'=0$, $e_0=1$, $e''=\infty$, то равенство в (5) возможно тогда и только тогда, когда подобласть $G' \subset H^+$ есть полукруг $K'=\{z: \operatorname{Im} z > 0, |z| < r\}$, а $G''=H^+ \setminus \bar{K}'$. В случае произвольной области G равенство в (5) возможно в том и только том случае, когда существует конформное отображение f области G на H^+ с нормировкой (3), при котором подобласть G' отображается на K' , а подобласть G'' на $H^+ \setminus \bar{K}'$.

3. Сформулируем основной результат.

Теорема 1. Пусть G — односвязная область в $\bar{C}_z$ с границей, состоящей более чем из двух точек. Зафиксируем три различных простых конца e' , e_0 и e'' , входящих в G , и рассмотрим произвольные односвязные подобласти G' и G'' , примыкающие к простым концам e' и e'' соответственно. Пусть $k(G')$ и $k(G'')$ — приведенные модули подобластей G' и G'' относительно простых концов e' , e'' и области G с отмеченными парами простых концов e_0 , e'' и e' , e_0 соответственно. Пусть $\xi=F(z)$ — однолиственное конформное отображение области G на полосу $\Pi=\{\xi: 0 < \operatorname{Im} \xi < \pi\}$ с граничным соответствием

$$\lim_{z \rightarrow e'} \operatorname{Re} F(z) = -\infty, \quad F(e_0)=0, \quad \lim_{z \rightarrow e''} \operatorname{Re} F(z) = +\infty. \quad (6)$$

Тогда, если $G' \cap G'' = \emptyset$, то для всякой точки z , принадлежащей множеству $G \setminus (G' \cup G'')$, выполнено

$$-\pi k(G') + \ln \mu(t_0) \leq \operatorname{Re} F(z) \leq \pi k(G'') - \ln \mu(t_0), \quad (7)$$

где t_0 — единственный корень уравнения

$$\frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{v(t)} = k(G') + k(G''), \quad (8)$$

а функции $\mu(t)$, $\nu(t)$ определяются равенствами

$$\mu(t) = \frac{t^2 - 1}{t} \left(\frac{t+1}{t-1} \right)^{1/2}; \quad (9)$$

$$\nu(t) = \frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} \left(\frac{t-1}{t+1} \right)^{1+1/2}. \quad (10)$$

Равенства в (7) достигаются в том и только том случае, когда

$$k(G') + k(G'') = \frac{1}{\pi} \ln 16. \quad (11)$$

В остальных случаях оценки строгие, однако при заданных $k(G')$ и $k(G'')$ не могут быть заменены никакими лучшими.

Доказательство теоремы основывается на следующих рассуждениях. Посредством вспомогательного отображения $w = e^z$ сводим ситуацию к изучению отображения $f(z) = e^{F(z)}$ области G на полуплоскость H^+ . Нормировка (6) отображения $F(z)$ обеспечивает выполнение нормировки (3) отображения $f(z)$.

Пусть A — наибольшая из односвязных областей в C_w , содержащих 0, симметричных относительно вещественной прямой и совпадающих в H^+ с областью $f(G')$; пусть B — наибольшая из односвязных областей в $\bar{C}_w$, содержащих ∞ , симметричных относительно вещественной прямой и совпадающих в H^+ с областью $f(G'')$. Из (4) находим

$$R_A = 4 \exp \{ -\pi k(G') \}$$

и из аналогичных соображений

$$R_B = 4 \exp \{ -\pi k(G'') \},$$

где R_A и R_B — внутренние конформные радиусы областей A и B относительно точек $w=0$ и $w=\infty$ соответственно.

Области A и B не налегают одна на другую, и наша задача свелась к рассмотрению пары неналегающих областей с заданными конформными радиусами. Дальнейшие рассуждения основаны на результатах работы (2), касающихся свойств таких пар.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 1 за исключением, быть может, условия $F(e_0) = 0$ в (6) на отображающую функцию $\xi = F(z)$. Тогда*

$$\pi \delta(G', G'') - \ln 16 \leq \sup_{z \in Q} \operatorname{Re} F(z) - \inf_{z \in Q} \operatorname{Re} F(z) \leq \pi \delta(G', G'') - \ln \mu^2(t_0), \quad (12)$$

где $\delta'(G', G'') = k(G') - k(G'')$, Q — множество $G \setminus (G' \cup G'')$, а t_0 — корень уравнения (8).

Полное описание возможностей равенства в (12) довольно громоздко, поэтому мы заметим лишь, что $1 < \mu(t) \leq 4$ и что $\mu(t_0)$ стремится к 4 при стремлении $\delta(G', G'')$ к $\frac{1}{\pi} \ln 16$.

Приведенные в работе оценки могут быть использованы, например, при получении утверждений типа теорем Альфорса о конформном отображении криволинейной полосы на полосу, а также различных их следствий (см., например, (3-5)).

Тюменский государственный университет

Поступило
19 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Дж. Дженкинс, Однолистные функции и конформные отображения, М., ИЛ, 1962. ² O. Teichmüller, Dtsch. Math., v. 3 (1938). ³ L. Ahlfors, Acta Soc. Scient. Fenn., N. S. AI, № 9 (1930). ⁴ С. Е. Варшавский, Сб. пер., Математика, т. 2, № 4 (1958). ⁵ М. А. Евграфов, Матем. сб., т. 90, № 1 (1973).