

А. Е. ПЕТРОВ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА НАБОРОВ КООРДИНАТ НА ПРАДЕРЕВЬЯХ С НУМЕРОВАННЫМИ ДУГАМИ

(Представлено академиком В. С. Семензиным 6 II 1974)

1. Теория графов все шире применяется в системотехнике. В связи с этим в ней возникают новые задачи, одна из которых рассматривается ниже.

Известны различные способы кодирования структуры деревьев; обзор их и библиографию по этим вопросам можно найти в работе ⁽¹⁾. В данной работе один из наиболее распространенных в системотехнике способов применяется к специальному случаю графа с взвешенными дугами и формулируются некоторые полезные для практических приложений свойства соответствующих наборов координат.

2. Ниже используются следующие обозначения и термины, взятые из монографии Бержа ⁽²⁾.

Вершины ориентированного графа будем обозначать буквами x и y , а символом (x, y) обозначим дугу с началом в вершине x и концом в вершине y . $|Gx|$ — число дуг ориентированного графа, выходящих из вершины x . Если $|Gx| = 0$, то вершина x называется висячей.

Конечный ориентированный граф без контуров называется прадеревом с корнем a , если в каждую вершину, отличную от a , входит единственная дуга, причем в a не входит ни одна дуга.

Дадим следующие определения.

Определение 1. Граф с нумерованными дугами называется ориентированным графом, из любой вершины которого выходит конечное число дуг, каждой из которых однозначно сопоставлено целое неотрицательное число — номер дуги, причем номера всех дуг, выходящих из вершины x , различны и не превосходят $|Gx| - 1$.

Определение 2. Два графа с нумерованными дугами и множествами вершин X и X' соответственно называются нумерованными изоморфными, если существует взаимно однозначное соответствие

$$\varphi: X \rightarrow X'$$

такое, что вершины x и y соединены дугой (x, y) с номером C , если и только если $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ соединены дугой $(\varphi(x), \varphi(y))$ с номером C .

Ниже под последовательностью всегда понимается конечная последовательность целых неотрицательных чисел. Если $c_1, \dots, c_m, \dots, c_n$ — последовательность, то $c_1, \dots, c_m$, $0 \leq m \leq n$, называем отрезком последовательности. Символами K_i , где $i = 0, 1, 2, 3, 4$, будем обозначать конечные множества последовательностей.

3. Рассмотрим прадереву с нумерованными дугами (п.н.д.). Для каждой вершины x , отличной от корня a , существует единственный путь из a в x . Сопоставляя каждой вершине x последовательность номеров дуг этого пути в порядке их прохождения и полагая образом корня пустую последовательность, получим взаимно однозначное отображение

$$k: X \rightarrow K_i;$$

K_i называем в дальнейшем набором координат на п.н.д., а $k(x)$ — координатами вершины x .

Легко видеть, что у п.н.д. вершины x и y соединены дугой (x, y) с номером C , если и только если

$$k(x) = k_1, \dots, k_n, \quad k(y) = k_1, \dots, k_n, \quad C, \quad n \geq 0. \quad (1)$$

Отсюда следует, что два п.н.д. нумерованно изоморфны, если и только если их наборы координат совпадают.

Легко видеть, что если K_2 — множество координат висячих вершин п.н.д., то множество всевозможных попарно различных отрезков последовательностей из множества K_2 совпадает с множеством K_1 , поэтому два п.н.д. нумерованно изоморфны, если и только если множества координат их висячих вершин совпадают.

Предложение 1. *Множество K_1 является набором координат некоторого п.н.д., если и только если:*

А) из $k_1, \dots, k_n, k_{n+1} \in K_1$ следует $k_1, \dots, k_n \in K_1, n \geq 0$;

Б) из $k_1, \dots, k_n, k_{n+1} \in K_1$ и $0 \leq k_{n+1}^* \leq k_{n+1}$ следует $k_1, \dots, k_n, k_{n+1}^* \in K_1, n \geq 0$.

Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть множество K_1 состоит из m последовательностей и удовлетворяет условиям А) и Б). Возьмем множество X , состоящее из m вершин и поставим его во взаимно однозначное соответствие с K_1

$$k: X \rightarrow K_1.$$

Вершины x и y соединим дугой (x, y) с номером C , если и только если выполнено соотношение (1). Легко проверить, что полученный граф является п.н.д., набор координат которого совпадает с K_1 .

Предложение 2. *K_2 является множеством координат висячих вершин некоторого п.н.д., если и только если:*

В) из $k_1, \dots, k_n \in K_2$ следует, что не существует последовательности $c_1, \dots, c_m$ такой, что

$$k_1, \dots, k_n, c_1, \dots, c_m \in K_2, \quad n \geq 1, \quad m \geq 1;$$

Г) из $k_1, \dots, k_n \in K_2$ и $0 \leq k_j^* \leq k_j$ следует, что существует последовательность $c_1, \dots, c_m$ такая, что

$$k_1, \dots, k_{j-1}, k_j^*, c_1, \dots, c_m \in K_2, \quad n \geq 1, m \geq 0, 1 \leq j \leq n$$

Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть множество K_2 удовлетворяет условиям В) и Г). Возьмем множество K_1 , состоящее из всевозможных попарно различных отрезков последовательностей из множества K_2 . Для него условие А) выполнено по построению, выполнение условия Б) обеспечено условием Г). В силу предложения 1, существует п.н.д., для которого K_1 служит набором координат. Легко проверить, что K_2 будет множеством координат висячих вершин этого п.н.д.

Определение 3. П.н.д. называется *натянутым на множество* K_0 , если выполнены следующие условия:

Д) множество координат висячих вершин этого п.н.д. содержит K_0 ;

Е) данное п.н.д. имеет наименьшее число вершин среди всех п.н.д., удовлетворяющих условию Д).

Теорема. *П.н.д., натянутое на множество K_0 , существует, если и только если K_0 удовлетворяет условию В). Это п.н.д. единственно с точностью до нумерованного изоморфизма.*

Необходимость условия В) очевидна.

Достаточность. Пусть множество K_0 удовлетворяет условию В). Построим множество K_2 по следующему алгоритму: сначала положим $K_2 = K_0$ и будем поочередно просматривать последовательности $k_1, \dots, k_n \in K_0$, находя для каждой множество $T_{k_1, \dots, k_n}$, состоящее из всех упорядоченных пар целых положительных чисел (j, k_j^*) таких, что $1 \leq j \leq n, 0 \leq k_j^* \leq k_j$

и не существует последовательности $c_1, \dots, c_m$, $m \geq 0$, при которой последовательность $k_1, \dots, k_j^*, c_1, \dots, c_m \in K_0$; будем каждый раз добавлять к K_2 все последовательности $k_1, \dots, k_{j-1}k_j^*$, соответствующие элементам $(j, k_j^*) \in T_{k_1, \dots, k_n}$ и не содержащиеся еще в K_2 . Легко видеть, что последовательности, соответствующие одному и тому же множеству $T_{k_1, \dots, k_n}$, попарно различны; поэтому после просмотра всего K_0 мы получим множество K_2 попарно различных последовательностей, причем $k_1, \dots, k_n \in K_2$, если и только если выполнены условия:

В⁰) не существует последовательности $c_1, \dots, c_m$, $m > 0$, такой, что $k_1, \dots, k_n, c_1, \dots, c_m \in K_0$;

Г⁰) существует целое неотрицательное число $k_n^+ \geq k_n$ и существует последовательность $l_1, \dots, l_p$ такие, что $k_1, \dots, k_{n-1}, k_n^+, l_1, \dots, l_p \in K_0$, $p \geq 0$.

Из условий В⁰) и Г⁰) непосредственно вытекает, что K_2 удовлетворяет условиям В) и Г). В силу предложения 2 существует п.н.д. (обозначим его P_1), для которого K_2 служит множеством координат висячих вершин. По построению оно удовлетворяет условию Д).

Пусть множество K_4 содержит K_0 и удовлетворяет условиям В) и Г). Из условия Г⁰) непосредственно следует, что для любой последовательности $k_1, \dots, k_n \in K_2$ существует последовательность $c_1, \dots, c_m$, где $m \geq 0$, такая, что $k_1, \dots, k_n, c_1, \dots, c_m \in K_4$; таким образом, P_1 удовлетворяет условию Е). Отсюда же следует, что K_2 является множеством координат висячих вершин любого п.н.д., натянутого на K_0 , а значит, это п.н.д. единственно с точностью до нумерованного изоморфизма.

О п р е д е л е н и е 4. Множество K_3 порождает некоторое п.н.д., если выполнены следующие условия;

Ж) это п.н.д. натянуто на K_3 ;

З) K_3 содержится в любом другом множестве, на которое натянуто данное п.н.д.

П р е д л о ж е н и е 3. Множество K_3 порождает некоторое п.н.д., если и только если выполнены следующие условия:

И) K_3 удовлетворяет условию В);

К) из $k_1, \dots, k_n, k_{n+1} \in K_3$ следует, что не существуют число k_{n+1}^* такое, что $k_{n+1}^* > k_{n+1}$, и последовательность $c_1, \dots, c_m$ такие, что

$$k_1, \dots, k_n, k_{n+1}, c_1, \dots, c_m \in K_3, \quad m \geq 0, n \geq 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о непосредственно следует из условия Г⁰).

Легко видеть, что два п.н.д. нумерованно изоморфны, если и только если порождающие их множества совпадают.

4. В соответствии с определениями Рида ⁽¹⁾, результаты п. 3 можно выразить так: построены три процедуры кодирования структуры п.н.д. — наборами координат, множествами координат висячих вершин и порождающими множествами. Сформулированные предложения дают необходимые и достаточные условия существования п.н.д., имеющего соответствующий код, при различных процедурах кодирования и содержат в неявном виде процедуры декодирования.

Поступило
31 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ R. C. Read, The Coding of Various Kinds of Unlabeled Trees, Graph. Theory and Computing, NY, 1972. ² К. Берж, Теория графов и ее применения, М., ИЛ, 1962.