

Н. В. МУЗЫЛЕВ

О РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИХ СВОЙСТВАХ МЕТОДА КВАЗИОБРАЩЕНИЯ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 27 III 1975)

Принцип регуляризации А. Н. Тихонова ^(1, 2) и его конкретные алгоритмы являются основанием для построения устойчивых приближений к решениям некорректно поставленных задач, к числу которых относится ряд задач управления. С другой стороны, для поиска управляющих функций в ⁽³⁾ предложен метод квазиобращения. Однако вопрос о том, можно ли его использовать для решения более широкого класса задач, т. е. является ли он регуляризирующим алгоритмом, не выяснен. В данной работе на примере задачи, обратной к задаче Коши для уравнения теплопроводности, показано, что для некоторых задач метод квазиобращения является регуляризирующим алгоритмом, попутно также установлены некоторые свойства других регуляризирующих алгоритмов.

В рассматриваемом случае метод квазиобращения позволяет решить следующую задачу: пусть известна функция $\tilde{u}_\delta(x) \in L_2$; требуется найти такую функцию $z_\delta(x) \in W_2^1$, чтобы для решения $u(x, t) \in L_2$ задачи Коши

$$u_t = u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = z_\delta(x)$$

при $t=T$ выполнялось неравенство $\|u(x, T) - \tilde{u}_\delta(x)\|_{L_2} \leq \delta$, где $\delta > 0$ — наперед заданное число.

По методу квазиобращения в качестве $z_\delta(x)$ берется решение $u(x, t)$ задачи

$$u_t = u_{xx} + \alpha u_{xxxx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq t < T, \quad (2)$$

$$u|_{t=T} = \tilde{u}_\delta(x)$$

при $t=0$, где α выбирается по принципу невязки ⁽⁴⁾.

Регуляризирующие алгоритмы позволяют решать более сложную задачу. Пусть известно, что для функции $\bar{u}(x) \in L_2$ существует единственная функция $\bar{z}(x) \in W_2^n$ такая, что для решения $u(x, t)$ задачи Коши

$$u_t = u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

$$u|_{t=0} = \bar{z}(x)$$

выполнено равенство $u(x, T) = \bar{u}(x)$, или же в операторной форме

$$A\bar{z} = \bar{u}. \quad (4)$$

Пусть известной является не сама функция $\bar{u}(x)$, а некоторое ее приближение $\tilde{u}_\delta(x) \in L_2$ такое, что

$$\|\tilde{u}_\delta - \bar{u}\|_{L_2} \leq \delta.$$

Требуется определить приближение $\tilde{z}_\delta(x) \in W_2^n$ такое, что

$$\|\tilde{z}_\delta - \bar{z}\|_{W_2^n} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0.$$

Покажем, что метод квазиобращения является регуляризирующим алгоритмом. Аналогично ⁽³⁾ введем функцию

$$\tilde{z}_\delta^\alpha(x) = F^{-1}(e^{\omega^2 T} f_\alpha(\omega) \cdot (F\tilde{u}_\delta)(\omega)), \quad (5)$$

где F — оператор преобразования Фурье, а функция $f_\alpha(\omega)$ определена при $\alpha \in (0, \infty)$, $\omega \in (-\infty, +\infty)$ и удовлетворяет следующим требованиям:

- 1) $0 < f_\alpha(\omega) \leq 1$ при всех $\alpha \in (0, \infty)$, $\omega \in (-\infty, +\infty)$;
- 2) существует такое l — неотрицательное целое число, что

$$f_\alpha(\omega) \cdot \omega^l e^{\omega^2 T} \leq c_\alpha \quad \text{для всех } \alpha > 0; \quad (6)$$

3) $f_\alpha(\omega)$ непрерывна по α , при почти всех ω монотонно убывает по α и

$$f_\alpha(\omega) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 1, \quad f_\alpha(\omega) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0.$$

Рассмотрим функцию

$$\rho(\alpha) = \|A\tilde{z}_\delta^\alpha - \tilde{u}_\delta\|_{L_2} = \|(f_\alpha - 1) \cdot F\tilde{u}_\delta\|_{L_2}.$$

Она обладает следующими свойствами:

- 1) является непрерывной и монотонно возрастающей;
- 2) $\rho(\alpha) \rightarrow \|\tilde{u}_\delta\|_{L_2}$ при $\alpha \rightarrow \infty$;
- 3) $\rho(\alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Следовательно, для любого δ , $0 < \delta < \|\tilde{u}_\delta\|_{L_2}$, существует единственное решение уравнения

$$\rho(\alpha) = \delta. \quad (7)$$

Имеет место

Т е о р е м а 1.

$$\|\tilde{z}_\delta^\alpha - \bar{z}\|_{W_2^k} \xrightarrow[\alpha \rightarrow 0]{\delta \rightarrow 0} 0,$$

где $k = \min\{l, n\}$. В частности, α может быть выбрано как решение уравнения (7).

Заметим, что независимое стремление к нулю α и δ возможно вследствие того, что оператор A самосопряженный как оператор из L_2 в L_2 . Возьмем $f_\alpha(\omega) = e^{-\alpha\omega^2 T}$, тогда $\tilde{z}_\delta^\alpha(x)$ будет решением задачи (2) и, следовательно, метод квазиобращения является регуляризирующим алгоритмом, причем $\tilde{z}_\delta^\alpha(x) \in W_2^l$, где l сколь угодно велико, а значение параметра α может быть выбрано по принципу невязки, т. е. из условия (7).

Теорема 1 позволяет также проводить анализ других регуляризирующих алгоритмов. Так, например, для метода регуляризации А. Н. Тихонова, в случае, когда сглаживающий функционал берется в виде $\Omega[z] = \|z\|_{L_2}^2$, получаем

$$f_\alpha(\omega) = (1 + \alpha e^{2\omega^2 T})^{-1}$$

и условия (6) выполнены при сколь угодно большом l . Следовательно, при условии, что $\bar{z} \in W_2^n$, алгоритм даст сходимость в W_2^n . Однако для его модификации, названной алгоритмом упрощенной регуляризации ⁽⁶⁾, получаем $f_\alpha(\omega) = (1 + \alpha(1 + \omega^2)e^{\omega^2 T})^{-1}$ и сходимость не может быть лучше, чем по норме W_2^2 . Для этой модификации теорема также показывает возможность выбора α по невязке.

Полученные результаты легко переносятся на случай n -мерного пространства.

В заключение автор выражает благодарность акад. А. Н. Тихонову за внимание к работе и В. Б. Гласко за руководство работой.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
29 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Н. Тихонов, ДАН, т. 151, № 3, 501 (1963). ² А. Н. Тихонов, ДАН, т. 153, № 1, 49 (1963). ³ Р. Латтес, Ж.-Л. Лионс, Метод квазиобращения и его приложения, М., «Мир», 1970. ⁴ В. А. Морозов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 8, № 2, 295 (1968). ⁵ В. Я. Арсенин, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 133, 33 (1973). ⁶ А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко и др., Физика Земли, № 12, 30 (1968).