

В. И. МАЛЫХИН

О РАЗЛОЖИМОСТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ПРОСТРАНСТВ И ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КАТЕТОВА

(Представлено академиком П. С. Александровым 16 I 1975)

В 1947 г. М. Катетов поставил (см. ⁽¹⁾) следующую задачу: существует ли топологическое пространство * без изолированных точек, на котором всякая вещественная функция непрерывна в какой-нибудь точке? **. Задача привлекает простотой и неожиданностью формулировки. Конечно, для очень широкого класса пространств весьма просто указать вещественную функцию, которая всюду разрывна. Например, если пространство содержит два дизъюнктивных плотных множества A и B , то, положив $f(x) = 1$ на A и $f(x) = 0$ на B и определив f как угодно в остальных точках, получим всюду разрывную функцию. Разложимыми пространствами (т. е. содержащими два дизъюнктивных плотных множества) являются, например, все k -пространства (Н. В. Величко). Однако и среди неразложимых пространств тоже очень много весьма «хороших» пространств. Например, неразложимым может быть счетное регулярное пространство ⁽¹⁾. Неразложимые, а также максимальные и близкие к ним пространства обладают рядом причудливых свойств (см., например, ^(1, 2-4)), что привлекает к ним внимание топологов.

Одним из центральных нерешенных вопросов, связанных с разложимостью пространств, является вопрос о разложимости произведения двух пространств. В работе устанавливается тесная связь данного вопроса с задачей М. Катетова. Основным результатом работы является указание модели M теории множеств ZFC, в которой задача М. Катетова решается отрицательно, а произведение двух пространств всегда разложимо. Замечательным свойством модели M является то, что в ней всякое топологическое пространство (напоминаем, что рассматриваются только бесконечные плотные в себе пространства) разлагается в счетную сумму своих подпространств с пустой внутренностью.

1. О максимальных, SI , разложимых и неразложимых пространствах, их свойствах и строении см. ^(1, 2-4).

Кардиналы обозначаются буквами m, n, k и отождествляются с начальными ординалами той же мощности. Через m^+ обозначается последующий кардинал, через m^- — предыдущий (в таком случае он существует). Ординалы обозначаются буквами $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$, а также m, n, k и т. д. Знак Σ обозначает дизъюнктивную сумму.

Пусть $(X, \tau), (Y, \mu)$ — топологические пространства. Положим по определению:

1) $(X, \tau) \in \mathcal{K} \leftrightarrow$ всякая вещественная функция на X непрерывна в какой-нибудь точке.

2) $(X, \tau) \in \text{ПВИ} \leftrightarrow$ семейство всех подпространств с пустой внутренностью есть σ -идеал.

3) $((X, \tau), (Y, \mu)) \in \text{Нер} \leftrightarrow$ произведение пространств X и Y неразложимо.

* Все пространства в дальнейшем предполагаются бесконечными и плотными в себе.

** В оригинале требуется хаусдорфовость такого пространства, но в плане данной работы это несущественно.

4) $(X, \tau) \in SIB \leftrightarrow (X, \tau)$ есть SI -пространство, полное по Бэру.
 5) $(X, \tau) \in \text{ПВ}(m) \leftrightarrow X = \bigcup \{X_\alpha: \alpha < m\}$ и $\text{Int } X_\alpha = \Lambda$ при всяком $\alpha < m$.
 Если $m = \aleph_0$, то положим $\text{ПВ}(\aleph_0) = \text{ПВ}$.

2. Лемма 1. $\text{ПВ} \cap \mathcal{K} = \Lambda$.

Действительно, пусть $(X, \tau) \in \text{ПВ}$, т. е. $X = \bigcup \{X_n: n < \omega_0\}$ и для всякого $n < \omega_0$ множество X_n имеет пустую внутренность. Определим вещественную функцию f на X правилом:

$$f(x) = \frac{1}{n} \leftrightarrow x \in X_n.$$

Легко видеть, что f — всюду разрывная функция, тем самым $(X, \tau) \notin \mathcal{K}$.

Лемма 2. Если $(X, \tau) \notin \text{ПВ}$, то существует $V \in \tau$ такое, что $(V, \tau/V) \in \text{ПВИ}^*$.

Действительно, иначе существует система $\mathcal{D}$ открытых в X множеств такая, что $W \in \mathcal{D} \rightarrow (W, \tau/W) \in \text{ПВ}$ и $\bigcup \mathcal{D}$ плотно в X . Но тогда $(X, \tau) \in \text{ПВ}$. Противоречие.

Лемма 3 (А. Г. Елькин). Если (X, τ) — максимальное пространство, $(X, \tau) \notin \text{ПВ}$, то $(X, \tau) \in \mathcal{K}$.

Доказательство. Пусть f — произвольная функция из пространства (X, τ) во множество действительных чисел; ее можно считать ограниченной. Тогда f в каждой точке x имеет предел; обозначим этот предел через $\varphi(x)$. Рассмотрим множество $A_n = \{x: |f(x) - \varphi(x)| \geq 1/n\}$. Если функция f всюду разрывна, то $\bigcup \{A_n: n < \omega_0\} = X$. Так как $(X, \tau) \notin \text{ПВ}$, то существует n_0 , для которого $\text{Int } A_{n_0} \neq \Lambda$. Пусть $z \in \text{Int } A_{n_0}$. Так как $\varphi(z) = \lim_{y \rightarrow z} f(y)$, то существует такая окрестность V точки z , что $|\varphi(z) - f(y)| < 1/(4n_0)$ для всякой точки $y \in V$. Следовательно, для всяких двух точек y_1, y_2 из V будет $|f(y_1) - f(y_2)| < 1/(2n_0)$, что противоречит определению множества A_{n_0} .

Теорема 1. Справедливы следующие импликации:

$$\text{Нер} \neq \Lambda \rightarrow \mathcal{K} \neq \Lambda \leftrightarrow \text{ПВИ} \neq \Lambda \leftrightarrow SIB \neq \Lambda.$$

Доказательство. 1) Докажем сначала эквивалентность $\mathcal{K} \neq \Lambda \leftrightarrow \text{ПВИ} \neq \Lambda$. Пусть $(X, \tau) \in \mathcal{K}$. Тогда $(X, \tau) \notin \text{ПВ}$ по лемме 1. Значит (по лемме 2) существует $V \in \tau$ такое, что $(V, \tau/V) \in \text{ПВИ}$. Тем самым $\text{ПВИ} \neq \Lambda$. Пусть теперь $(X, \tau) \in \text{ПВИ}$. Существует большая, чем τ , максимальная топология τ' . Ясно, что $(X, \tau') \notin \text{ПВ}$, так как $(X, \tau) \notin \text{ПВ}$. Но тогда (по лемме 3) $(X, \tau') \in \mathcal{K}$.

2) Чтобы установить эквивалентность $\text{ПВИ} \neq \Lambda \leftrightarrow SIB \neq \Lambda$ необходимо знать, что всякое подпространство SI -пространства с пустой внутренностью нигде не плотно (см., например, (4)).

3) Пусть теперь $\text{Нер} \neq \Lambda$ и $((X, \tau), (Y, \mu)) \in \text{Нер}$. Обозначим через (Z, ν) произведение пространств (X, τ) и (Y, μ) . Согласно (3), в (Z, ν) существует открытое SI -подпространство, которое можно выбрать «прямоугольником» $A \times B$, где A и B — открытые SI -подпространства пространств X и Y соответственно. Как следует тогда из теоремы 3 работы (5), какое-то из пространств $(A, \tau/A)$, $(B, \mu/B)$ не входит в класс ПВ и из леммы 2 заключаем, что $\text{ПВИ} \neq \Lambda$.

Извлечем из теоремы 1

Следствие 1. Задача М. Катетова эквивалентна следующей:

Существует ли топологическое пространство, на котором всякая вещественная функция непрерывна почти всюду, т. е. на плотном открытом множестве?

Действительно, $\mathcal{K} \neq \Lambda \rightarrow$ «существует $(X, \tau) \notin \text{ПВ}$ ». Пусть τ' — большая, чем τ , максимальная топология, тогда $(X, \tau') \notin \text{ПВ}$. По лемме 2 существует $V \in \tau'$, для которого $(V, \tau'/V) \in \text{ПВИ}$, причем, очевидно, $(V, \tau'/V)$ — максимальное пространство. Итак, найдено максимальное пространство $(Z, \nu) \in \text{ПВИ}$. Тогда, как легко видеть, $(Z, \nu) \in \mathcal{K}$ и $(W, \nu/W) \in \mathcal{K}$ для вся-

* τ/V — топология на V как на подпространстве (X, τ)

кого $W \in v$. Пусть f — произвольная вещественная функция на Z . Тогда множество точек непрерывности f всюду плотно в (Z, v) и, следовательно, открыто, что и требовалось доказать.

3. Здесь доказывается основное для всей работы

Утверждение. $\text{Con}(\text{ZFC}) \rightarrow \text{Con}(\text{ZFC} + \text{«всякое топологическое пространство разлагается в счетную сумму своих подпространств с пустой внутренностью»})^*$.

Пусть $K_0(m^+)$ обозначает следующее предложение:

На m^+ существует семейство F подмножеств такое, что $|F| > m^+$ и $|\{f \cap \alpha : f \in F\}| \leq m$ для всякого $\alpha < m^+$.

Легко видеть, что $K_0(m^+)$ влечет существование на m^+ системы $\mathcal{R} = \{T_\varepsilon^\delta : \delta < m, \varepsilon_1 < m^{++}\}$ подмножеств со следующими свойствами:

а) если $\delta < m, \varepsilon_1 < m^{++}, \varepsilon_2 < m^{++}$, то $|T_{\varepsilon_1}^\delta \cap T_{\varepsilon_2}^\delta| \leq m$;

б) $\bigcup \{T_\varepsilon^\delta : \delta < m\} = m^+$ для всякого $\varepsilon < m^{++}$.

Действительно, возьмем множество m и пусть Φ_α — какое-нибудь взаимно однозначное соответствие между множеством m и множеством $\{f \cap \alpha : f \in F\}$. Теперь каждому $f \in F$ однозначно соотносится функция $\tilde{f}$ из множества m^+ в множество m по правилу $\tilde{f}(\alpha) = \Phi_\alpha^{-1}(\{f \cap \alpha\})$. Определим множество $T_\varepsilon^\delta \in \mathcal{R}$ правилом: если $\eta \in m^+$, то $\eta \in T_\varepsilon^\delta \leftrightarrow \tilde{f}_\varepsilon(\eta) = \delta$.

Можно убедиться, что система $\mathcal{R}$ обладает свойствами а) и б) (см. также ⁽⁶⁾).

Известно ⁽⁷⁾, что $[V=L] \rightarrow$ «Для всякого бесконечного кардинала m верно $K_0(m^+)$ ».

В дальнейшем все изложение ведется (если прямо не оговорено обратное) в модели $[V=L]$.

Обозначим через θ наименьший недостижимый кардинал **. Следовательно, если $m < \theta$, то $m = (m^-)^+$ или $\text{cf}(m) = (\text{cf}(m^-))^+ < m$ ***.

Теорема 2. $\bigcup \{\text{ПВ}(m) : m < \theta\} \in \text{ПВ}$.

Доказательство по индукции. Предположим, что для любого $k < n$, где $n < \theta$ уже доказано, что $\text{ПВ}(k) \in \text{ПВ}$. Докажем, что $\text{ПВ}(n) \in \text{ПВ}$.

В силу замечания (непосредственно перед теоремой 2) необходимо рассмотреть два случая.

1) Пусть n — регулярный кардинал и, значит, имеется предшествующий кардинал m , таким образом, $n = m^+$. Пусть $(Y, \tau) \in \text{ПВ}(n)$, т. е. $Y = \sum \{Y_\alpha : \alpha < m^+\}$ и $\text{Int } Y_\alpha = \Lambda$ для всякого $\alpha < m^+$. Рассмотрим систему $\mathcal{R}$ на множестве m^+ (см. определение и свойства системы $\mathcal{R}$ выше) и положим $Y_\varepsilon^\delta = \bigcup \{Y_\alpha : \alpha \in T_\varepsilon^\delta\}$.

Тогда система $\tilde{\mathcal{R}} = \{Y_\varepsilon^\delta\}$ обладает следующими свойствами:

а) $\bigcup \{Y_\varepsilon^\delta : \delta < m\} = Y$ для каждого $\varepsilon < m^{++}$;

б) если $\delta < m, \varepsilon_1 < m^{++}, \varepsilon_2 < m^{++}$, то

$$Y_{\varepsilon_1}^\delta \cap Y_{\varepsilon_2}^\delta = \bigcup \{Y_\alpha : \alpha \in T_{\varepsilon_1}^\delta \cap T_{\varepsilon_2}^\delta\}.$$

Возможны следующие варианты:

А) Существует $\varepsilon < m^{++}$ такое, что $\text{Int } Y_\varepsilon^\delta = \Lambda$ при каждом $\delta < m$. Тогда $(Y, \tau) \in \text{ПВ}(m)$ и по индуктивному предположению $(Y, \tau) \in \text{ПВ}$.

Б) Для всякого $\varepsilon < m^{++}$ существует $\delta(\varepsilon) < m$ такое, что $\text{Int } Y_\varepsilon^{\delta(\varepsilon)} \neq \Lambda$. Тогда, как легко видеть, существует некоторое $\delta < m$ и «последовательность» $\{\varepsilon_\alpha : \alpha < m^{++}\}$ такие, что $\text{Int } Y_{\varepsilon_\alpha}^\delta \neq \Lambda$ при всяком $\alpha < m^{++}$. Пусть $P_\alpha = \{\beta \in T_{\varepsilon_\alpha}^\delta : (\text{Int } Y_{\varepsilon_\alpha}^\delta) \cap Y_\beta \neq \Lambda\}$.

Заметим, что если $P_{\alpha_1} \cap P_{\alpha_2} = \Lambda$ при любых α_1, α_2 из m^{++} , то мы имеем во множестве m^+ систему мощности m^{++} дизъюнктивных непустых подмножеств, чего не может быть. Значит, существуют такие α_1, α_2 из m^{++} , что $P_{\alpha_1} \cap P_{\alpha_2} \neq \Lambda$. Но тогда $G = \text{Int}(Y_{\varepsilon_{\alpha_1}}^\delta \cap Y_{\varepsilon_{\alpha_2}}^\delta) \neq \Lambda$. Однако $G \subseteq \bigcup \{Y_\gamma : \gamma \in T_{\varepsilon_{\alpha_1}}^\delta \cap T_{\varepsilon_{\alpha_2}}^\delta\}$

* См. сноску в начале работы.

** Так как $[V=L] \rightarrow \text{GCH}$, то понятия слабо и сильно недостижимого кардиналов совпадают.

*** $\text{cf}(m)$ — кофинитальный характер кардинала m .

и каждое Y_γ имеет пустую внутренность, т. е. $(G, \tau/G) \in \text{ПВ}(m)$. Теперь либо мы найдем дизъюнктивную систему $\mathcal{D}$ из открытых множеств такую, что $\bigcup \mathcal{D}$ плотно в Y и $(G, \tau/G) \in \text{ПВ}(m)$ для всякого $G \in \mathcal{D}$; но тогда, как легко видеть, $(Y, \tau) \in \text{ПВ}(m)$ (и тем самым, по индуктивному предположению, $(Y, \tau) \in \text{ПВ}$); либо в пространстве (Y, τ) существует открытое множество V такое, что $(W, \tau/W) \notin \text{ПВ}(m)$ для всякого открытого множества $W \subseteq V$. Однако тогда $(V, \tau/V) \in \text{ПВ}(m)$ по А), ибо предположение Б) для него неверно. Итак, в случае регулярного кардинала n теорема 2 доказана.

2) Пусть n — сингулярный кардинал, тем самым $\text{cf}(n) < n$ и $(\text{cf}(n))^-$ существует (см. замечание непосредственно перед теоремой 2). Пусть $m = (\text{cf}(n))^-$. Тогда $m^+ = \text{cf}(n)$. По предположению $Y = \sum \{Y_\alpha : \alpha < n\}$ и $\text{Int } Y_\alpha = \Lambda$ для всякого $\alpha < n$. Пусть φ — функция из m^+ в n и $\sup \{\varphi(\beta) : \beta < m^+\} = n$ (φ существует в силу определения $\text{cf}(n)$). Пусть $\mathcal{D} = \{V \in \tau : \text{существует такое } k < n, \text{ что } (V, \tau/V) \in \text{ПВ}(k)\}$. По индуктивному предположению $\mathcal{D} = \{V \in \tau : (V, \tau/V) \in \text{ПВ}\}$. Если $\bigcup \mathcal{D}$ плотно в (Y, τ) , то и $(Y, \tau) \in \text{ПВ}$. Поэтому пусть $W = Y \setminus [\bigcup \mathcal{D}] \neq \Lambda$. Теперь $W = \bigcup \{W_\alpha = W \cap Y_\alpha : \alpha < n\}$ и $\text{Int } W_\alpha = \Lambda$ для всякого $\alpha < n$. Заметим, что если $V \in \tau$ и $V \subset W$, то $(V, \tau/V) \notin \text{ПВ}(k)$ для всякого $k < n$. Отсюда $\text{Int } Z_\beta = \Lambda$ для всякого $\beta < m^+$, где $Z_\beta = \bigcup \{W_\alpha : \alpha < \varphi(\beta)\}$. Но тогда $(W, \tau/W) \in \text{ПВ}(m^+)$. Этим противоречием (ибо $m^+ < k$) заканчивается доказательство теоремы 2.

Обозначим через M класс всех множеств (напомним, что все изложение ведется в модели $[V=L]$), ранг каждого из которых строго меньше θ . Тогда M — модель для системы аксиом ZFC. В M нет недостижимых кардиналов, поэтому очевидна

Теорема 3 $[M]^*$. *Всякое топологическое пространство разлагается в сумму счетного числа своих подпространств с пустой внутренностью.*

Следствие 2 $[M]$. *Классы $\mathcal{H}$, ПВИ, SIB, Нер пусты.*

Следствие 3 $[M]$. *Всякое максимальное пространство совершенно**.*

З а м е ч а н и е. Известно (см., например, ⁽⁸⁾), что предположение о существовании измеримого кардинала противоречит аксиоме конструктивности. Для нас поэтому интересно следующее

Предложение 1. *Если существует измеримый кардинал, то Нер $\neq \Lambda$ (и, тем самым, $\mathcal{H} \neq \Lambda$, ПВИ $\neq \Lambda$, SIB $\neq \Lambda$).*

Соответствующий пример, доказывающий предложение 1, можно найти в ⁽⁵⁾ (следствие 1).

Автор благодарен В. И. Пономареву за внимание, проявленное к работе, и А. Г. Елькину за ценные советы и постановку задач.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
27 XI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. Катетов, Матем. сб., т. 21, № 1, 3 (1947). ² М. Katětov, Čas. pro pěst. mat. a fys., v. 75, № 2, 69 (1950). ³ E. Hewitt, Duke Math. J., v. 10, № 4, 309 (1943). ⁴ А. Г. Елькин, Вестн. Московск. унив., сер. матем., мех., № 5, 51 (1969). ⁵ В. И. Малыгин, Матем. сб., т. 90, № 1, 106 (1973). ⁶ K. Prikry, Proc. Am. Math. Soc., v. 38, № 3, 617 (1973). ⁷ C. C. Chang, Theory of Sets and Topology, VEB, Berlin, 1972. ⁸ Т. Нех, Теория множеств и метод форсинга, М., «Мир», 1973.

* Знаком $[M]$ сопровождаем предложения, верные в модели M .

** Т. е. всякое открытое множество есть множество типа F_σ .