

Академик Н. Н. РЫКАЛИН, Н. Н. РАРОВ,
А. А. УГЛОВ, И. В. ЗУЕВ

МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОЙ ФАЗЫ В УЗКОМ КАНАЛЕ

Пусть имеется цилиндрический объем несжимаемой жидкости, в котором мгновенно образовалась цилиндрическая полость радиуса R_0 и глубины H_0 . Определим время заполнения капала жидкостью для некоторых частных случаев:

1) фиксируется верхняя и нижняя границы жидкости (сжатие канала)

$$v_z(r, z, t) = 0, \quad v_r(r, z, t) = v_r(r, t), \quad v_r(r, 0) = 0, \quad R_2(t) \leq r \leq R_1(t)$$

(первая задача);

2) фиксируется боковая граница жидкости (оседание жидкости)

$$v_z(r, z, t) = v_z(z, t), \quad v_r(r, t) = 0 \text{ при } r = R_2 \text{ и } v_r(r, 0) = 0$$

(вторая задача);

3) рассматривается затекание капала, при этом радиальным движением жидкой фазы пренебрегаем (третья задача) (см. рис. 1).

В первой задаче, когда перераспределение объема идет за счет изменения боковых границ $R_i = R_i(t)$, где $i = 1, 2$, система уравнений Навье — Стокса, неразрывности и сохранения массы сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ln \left(1 + \frac{a}{\xi} \right) \frac{d\psi}{d\theta} + \frac{\psi(4-\psi)a}{\xi(\xi+a)} + 2b \left(\frac{1}{\xi^{1/2}} + \frac{1}{(\xi+a)^{1/2}} \right) = 0; \quad (1)$$

$$\frac{d\xi}{d\theta} = 2\psi, \quad \psi(0) = 0, \quad \xi(0) = 1, \quad (2)$$

где введены следующие безразмерные величины:

$$a = (R^{*2}/R_0^2 - 1), \quad b = \sigma R_0 / \rho v^2, \quad \theta = vt / R_0^2,$$

$$\xi = R_1^2(t) / R_0^2, \quad \psi(t) = f(t) / v,$$

σ — коэффициент поверхностного натяжения, $v = \mu / \rho$ — кинематическая вязкость, а $v_r = r^{-1}f(t)$ и

$$R_1(t) \leq r \leq R_2(t), \quad R_2(0) = R^*, \quad R_1(0) = R_0.$$

Время заполнения канала находим из соотношения

$$\tau = \frac{1}{2} \int_1 \frac{d\psi}{\psi(\xi)}, \quad (3)$$

где $\psi(\xi)$ определяется из решения уравнения

$$2\psi \ln \left(1 + \frac{a}{\xi} \right) \frac{d\psi}{d\xi} + \frac{\psi(4-\psi)}{\xi(\xi+a)} + 2b \left(\frac{1}{\xi^{1/2}} + \frac{1}{(\xi+a)^{1/2}} \right) = 0; \quad (4)$$

$\psi = 0$ при $\xi = 1$.

Решение уравнения (4) в общем виде найти не удается. Рассмотрим его частные случаи. В работе (1) имеется решение (4) при $b=0$. При пренебрежении вязкостью из (3), (4) можно получить

$$\tau = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\rho R_0^3}{\sigma}} \int_0^1 \sqrt{\frac{\ln(1+a/\xi)}{1+(1+a)^{1/2}-\xi^{1/2}-(a+\xi)^{1/2}}} d\xi, \quad (5)$$

а для узких каналов ($\xi \ll a$)

$$\tau = \sqrt{\frac{\rho R_0^3}{2\sigma}} \int_0^1 \sqrt{\frac{\ln(R^*/R_0) - \ln \kappa}{1-\kappa}} \kappa d\kappa. \quad (6)$$

Для оценки времени заполнения канала можно пользоваться приближенной формулой

$$\tau \approx \sqrt{\rho R_0^3 / \sigma} \ln(R^*/R_0). \quad (7)$$

Область применимости этой модели определяется неравенствами

$$H_0/R_0 \gg 1 \gg 1/Re,$$

где Re — критерий Рейнольдса.

Во второй задаче условие $v_z(r, z, t) = v_z(z, t)$, т. е. опускание верхней границы жидкости как плоскости, приводит к двум независимым уравнениям (8) и (10):

$$-\frac{df^2}{dR} \left[R^{*2} \ln \frac{R^*}{R} - \frac{1}{2} (R^{*2} - R^2) \right] + \left(\frac{R^{*2} - R^2}{R} \right) f^2 - \frac{4\nu}{R} f = \frac{\sigma}{\rho R^* (R^* - R)}; \quad (8)$$

$f(R_0) = 0$ и время заполнения канала находится с помощью соотношения

$$\tau = \int_0^{R_0} \frac{R dR}{(R^{*2} - R^2) f(R)}, \quad (9)$$

где $f(R)$ — решение уравнения (8).

Система уравнений (8), (9) описывает заполнение канала за счет капиллярных сил при отсутствии сил тяжести.

$$\frac{df^2}{dh} + \frac{2}{h} f^2 = -\frac{g}{h^2}, \quad f(H_0) = 0 \quad (10)$$

и время заполнения канала, аналогично (9), определяется соотношением

$$\tau = - \int_{H_0}^{h(0)} \frac{dh}{2hf(h)}, \quad h(R) = H_0 \frac{R^{*2} - R_0^2}{R^{*2} - R^2}. \quad (11)$$

Система уравнений (10), (11) отвечает заполнению канала за счет опускания жидкости при фактическом отсутствии капиллярных сил.

Из (8), (9) для узких каналов при $\nu=0$ получаем выражение, аналогичное (6) и (7):

$$\tau_0 = \tau_0 \int_0^1 \sqrt{\frac{B - \ln \kappa}{1 - \kappa}} \kappa d\kappa, \quad \tau_0 = \sqrt{\frac{\rho R_0^3}{\sigma}} \left(1 - \frac{R_0}{R^*} \right), \quad B = \ln \frac{R^*}{R_0} - \frac{1}{2}. \quad (12)$$

Из (10), (11) получим

$$\tau_g = (R_0/R^*) \sqrt{(H_0/g)}. \quad (13)$$

Сравнение формул (12) и (7) показывает, что они различаются только множителем порядка единицы. Численные оценки для типичных случаев узких каналов в расплавах металлов показывают, что соотношения (12) и (13) дают значения одного порядка.

Область применимости второй задачи определяется неравенствами

$$R_0/H_0 \gg 1 \gg \text{Re}.$$

Наконец, рассмотрим задачу о затекании узкого канала в жидкости под действием силы тяжести и градиента давления (рис. 1) (третья задача). Затыгивание канала в радиальном направлении за счет капиллярных сил не учитываем, поэтому из уравнения неразрывности следует, что $v_z = v_z(r, t)$.

При стекании жидкости по стенкам канала его заполнение происходит снизу. Ввиду очевидной сложности движения жидкости в области $z < -H(t)$ и $z > 0$ (рис. 1) будем рассматривать движение только в области $0 > z > -H(t)$, а время заполнения канала найдем из условия сохранения массы.

Пренебрегая размерами участка $-H(t) + R > z > -H(t)$ ввиду его малости для узкого канала и учитывая, что радиальные движения отсутствуют в области $0 > z > -H(t)$, а $v_z = v_z(r, t)$, из уравнения для z -компоненты векторного уравнения Навье — Стокса следует, что давление внутри жидкости не зависит от r . Тогда, интегрируя z -компоненту векторного уравнения Навье — Стокса по z от 0 до $-H$, с учетом условий на свободной границе

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\sigma}{R} \quad \text{при } z = -H(t)$$

получаем уравнение

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} - \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = -\rho g \left[1 + \frac{\sigma}{\rho g H(t)} \left(\frac{1}{R^*} + \frac{1}{R} \right) \right], \quad (14)$$

которое совместно с законом сохранения массы

$$2 \int_0^{R^*} \int_0^t v_z(r, t) r dr dt = R^2 [H(t) - H_0], \quad v_z(r, 0) = 0, \quad (15)$$

дает закон изменения $H = H(t)$. Из условия $H(t) = 0$ при $t = \tau$, найдем время заполнения канала τ .

Систему уравнений (14), (15) рассмотрим в двух предельных случаях: большой и малой вязкости жидкости.

При малых значениях числа Рейнольдса Re из (14) получим

$$v_z(r, t) = - \frac{(R^{*2} - r^2)}{4} F(t), \quad (16)$$

где $F(t)$ — правая часть уравнения (14). Подставляя (16) в (15) и дифференцируя по t , получим уравнение для определения уровня жидкости в канале

$$\frac{dH}{dt} + \frac{\alpha_1}{H} + \beta_1 = 0, \quad H = H_0 \text{ при } t = 0, \quad (17)$$

$$\alpha_1 = \frac{\sigma(R^{*2} - R^2)^2}{8\mu R^2 \bar{R}}, \quad \frac{1}{\bar{R}} = \frac{1}{R^*} + \frac{1}{R}, \quad \beta_1 = \frac{\rho g(R^{*2} - R^2)^2}{8\mu R^2}.$$

Решение уравнения (17) имеет вид

$$\beta_1 t = H_0 - H(t) + \frac{\alpha_1}{\beta_1} \ln \frac{\alpha_1 + \beta_1 H(t)}{\alpha_1 + \beta_1 H_0}. \quad (18)$$

Используя условие $t = \tau$, $H(\tau) = 0$, получим

$$\tau = \frac{8\mu R^2 H_0}{\rho g(R^{*2} - R^2)^2} \left[1 - \frac{\sigma}{\rho g \bar{R} H_0} \ln \left(1 + \frac{\rho g \bar{R} H_0}{\sigma} \right) \right]. \quad (19)$$

Первое слагаемое в (19), которое обозначим τ_g , учитывает затекание только под действием гравитационных сил, второе учитывает уменьшение τ за счет капиллярных сил.

Численная оценка для узкого канала в расплаве металла ($\sigma=10^3$ дин/см, $\mu=5 \cdot 10^{-2}$ пуаз, $\rho=10$ г/см³, $a^2=0,1$ см², $\mu/\rho g=5 \cdot 10^{-6}$ см·сек) $R^*=0,1$ см, $R=10^{-2}$ см дает $\tau_g \approx 0,1$ мсек. Отметим, что поскольку вязкость может сказаться только при малых значениях числа Re, характерный размер R^* должен быть малым. Полное время затекания с учетом капиллярных сил $\tau=0,01$ мсек, занижено, так как не учитывает времени выхода скорости заполнения канала на стационарное значение. Учет эту начальную стадию, оставив инерционный член в (14) и не учитывая вязкость (см. вторую задачу). В этом случае из (14), (15) вместо (16) получим

$$\frac{d^2 H}{dt^2} + \frac{\alpha_2}{H} + \beta_2 = 0, \quad H=H_0 \text{ при } t=0, \quad \alpha_2 = \frac{\sigma(R^{*2}-R^2)}{\rho R^2 \bar{R}},$$

$$\beta_2 = \frac{g(R^{*2}-R^2)}{R^2}. \quad (20)$$

Следовательно,

$$\tau = \sqrt{\frac{H_0 R^2}{2g(R^{*2}-R^2)}} \int_0^1 \frac{dz}{(1-z-\bar{\sigma} \ln z)^{1/2}}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\rho g H_0 \bar{R}}. \quad (21)$$

Без учета ускоряющих процесс капиллярных сил ($\tau=\tau_g$) получим из (21)

$$\tau_g = \sqrt{\frac{2R^2 H_0}{g(R^{*2}-R^2)}} \approx \frac{R}{R^*} \sqrt{\frac{2H_0}{g}}. \quad (22)$$

Без учета гравитационных сил ($\tau=\tau_\sigma$)

$$\tau_\sigma = H_0 \sqrt{\frac{\pi \rho R^2}{2\sigma(R^{*2}-R^2)\bar{R}}} \approx H_0 \frac{R}{R^*} \sqrt{\frac{\pi \rho R}{2\sigma}}. \quad (23)$$

Численные оценки при $H_0=2,5$ см, $R=10^{-2}$ см, $\rho=10$ г/см³, $\sigma=10^3$ дин/см дают $\tau_g=0,7$ и $\tau_\sigma=0,3$ мсек. при $R^*=1$ см и $\tau_g=7$ и $\tau_\sigma=3$ мсек. при $R^*=0,1$ см.

Результирующее время затекания канала приближенно можно найти из соотношения $\tau^{-1}=\tau_g^{-1}+\tau_\sigma^{-1}$ и $\tau \approx 0,2$ мсек. в приведенном выше примере с $R^*=0,1$ см.

Область применимости этой модели определяется неравенствами $H_0/R_0 \gg a_h/R_0 > 1$.

При оценке мы пренебрегли эффектами, связанными с наличием пограничного слоя. Толщина пограничного слоя для расплава металлов $\delta \approx (vt)^{1/2} \approx 3 \cdot 10^{-3}$ см. В соответствии с работой (2) при $vt/R^2 < 5 \cdot 10^{-3}$ толщина пограничного слоя меньше $0,1R$ и в остальной области скорость не зависит от r , что позволяет с достаточной точностью использовать соотношения (22), (23) для оценки соответствующих значений времени.

Институт металлургии им. А. А. Байкова Академии наук СССР
Москва

Поступило
28 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. О. Бытсв. Журн. прикл. механики и техн. физ., № 3 (1970). ² Шлихтинг, Теория пограничного слоя, ИЛ, М., 1969.