

А. И. НЕЙШТАДТ

ОБ ОСРЕДНЕНИИ В МНОГОЧАСТОТНЫХ СИСТЕМАХ

(Представлено академиком Л. Н. Седовым 12 III 1975)

1. Постановка задачи и результат. Будем рассматривать многочастотную систему стандартного вида:

$$\frac{dI}{dt} = \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(I) + \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon), \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $I = (I_1, \dots, I_m)^T$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$, правые части 2π -периодичны по всем φ_i и аналитичны в некоторой области. Введем осредненную систему

$$\frac{d\bar{I}}{dt} = \varepsilon f_0(\bar{I}), \quad f_0(I) = (2\pi)^{-n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(I, \varphi, 0) d\varphi_1 \dots d\varphi_n. \quad (2)$$

Обозначим $I(t) \equiv I(t, I_0, \varphi_0, \varepsilon)$, $\varphi(t)$ — решение (1), $I(0) = I_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$; $\bar{I}(t) \equiv \bar{I}(\varepsilon t, I_0)$ — решение (2), $\bar{I}(0) = I_0$. Решение $I(t)$ назовем ρ -отклоняющимся, если на заданном интервале времени $0 \leq t \leq a\varepsilon^{-1}$, $a > 0$, найдется момент t , в который $\|I(t) - \bar{I}(t)\| \geq \rho$. Следуя ⁽¹⁾, введем множество $H(\rho, \varepsilon)$ начальных условий ρ -отклоняющихся решений и будем оценивать $\text{mes } H(\rho, \varepsilon)$.

В ⁽¹⁾ рассмотрена общая система с быстрыми и медленными движениями и показано, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{mes } H(\rho, \varepsilon) = 0$. Близкий вывод для гамильтоновых систем получен в ⁽²⁾.

В частном случае системы стандартного вида (1) оценки работы ⁽¹⁾ можно провести явно и уточнить. При условиях, сформулированных ниже (п. 2) имеет место

Теорема. Пусть $c_{19}\varepsilon < \rho < c_{20}^{-1}$. Тогда

$$\text{mes } H(\rho, \varepsilon) < c_{21} \sqrt[3]{\varepsilon/\rho^5}, \quad (3)$$

где c_{19} , c_{20} , c_{21} и далее c_i — положительные постоянные *.

З а м е ч а н и е. Если непосредственно использовать для (1) оценки ⁽¹⁾, то придем к $\text{mes } H(\rho, \varepsilon) < c_1/\rho^2 |\ln \varepsilon|$. В ⁽³⁾ было указано, что эта оценка неэффективна, и в неопубликованной работе А. С. Пяртли для двухчастотных систем вида (1) получена уже реальная оценка

$$\text{mes } H(\rho, \varepsilon) < c_2 \sqrt[3]{\varepsilon |\ln \rho|^6/\rho^5},$$

которая уточняется сформулированной теоремой.

2. О б о з н а ч е н и я и п р е д п о л о ж е н и я. Пусть выполнены следующие предположения:

1^o) Правые части (1) определены в $Z \times [0, \varepsilon_0]$, где

$$Z = \{(I, \varphi) : I \in G, \quad |\text{Im } \varphi_i| \leq \sigma, \quad i = 1, \dots, n\},$$

$G \in R^m$ — компактная область, $\sigma > 0$, $\varepsilon_0 > 0$.

* Оценка (3) содержательна при $c_{22}\varepsilon^{1/6} < \rho < c_{20}^{-1}$, где $c_{22} = c_{21}^{2/3}(\text{mes } U)^{-2/3}$, U — исходное множество начальных условий.

2°) $f(I, \varphi, 0)$ и $\partial f(I, \varphi, 0)/\partial I$ аналитичны по φ и непрерывны в Z .

3°) При вещественных аргументах правые части (1) вещественны и непрерывно дифференцируемы.

4°) $\text{rang}(\partial\omega/\partial I) = n$.

5°) Измеримое множество $\Phi \subset G$ и числа $a > 0$, $\rho_0 > 0$ таковы, что при $I_0 \in \Phi$ и $0 \leq \varepsilon t \leq a$ решение $\bar{I}(\varepsilon t, I_0)$ определено и выполнено неравенство $d(\bar{I}(\varepsilon t, I_0), \partial G) \geq \rho_0$, где d — расстояние между множествами в R^m .

Обозначим

$$T^n = \{\varphi: 0 \leq \varphi_i \leq 2\pi, i=1, \dots, n\}, \quad U = \Phi \times T^n,$$

$$H(\rho, \varepsilon) = \{(I_0, \varphi_0): (I_0, \varphi_0) \in U, \exists t: 0 \leq t \leq a\varepsilon^{-1}, \|I(t) - \bar{I}(t)\| \geq \rho\}.$$

З а м е ч а н и е. Можно показать, что вместо аналитичности в 2°) достаточно требовать существования в $\text{Re } Z$ непрерывных производных по φ до $(2n+1)$ порядка включительно.

При этих условиях справедлива оценка (3).

3. Доказательство теоремы. Следуя (4), представим

$$f(I, \varphi, 0) = f_0 + F_N + R_N, \quad F_N = \sum_{1 \leq \|k\| \leq N} f_k(I) \exp i(k, \varphi),$$

$k = (k_1, \dots, k_n)$ — целочисленный вектор, $\|k\| = |k_1| + \dots + |k_n|$, $(k, \varphi) = = k_1\varphi_1 + \dots + k_n\varphi_n$, f_k — коэффициенты Фурье функции $f(I, \varphi, 0)$. Для любого $0 < \delta < 0.5$ можно выбрать $N = N(\delta) = c_3 |\ln \delta|$ так, чтобы было $\|R_N\| < \delta$.

Введем резонансное множество

$$V = V(\kappa, N) = \{I: |(k, \omega(I))| \leq \kappa \|k\|^{-n}, 1 \leq \|k\| \leq N\}, \quad \kappa > 0.$$

Как известно (5), в предположении 4°) п. 2

$$\text{mes } V < c_4 \kappa. \quad (4)$$

Следуя (1), введем для каждого решения временное резонансное множество

$$M = M(I_0, \varphi_0, V, \varepsilon) = \{t: I(t, I_0, \varphi_0, \varepsilon) \in V, 0 \leq t \leq a\varepsilon^{-1}\}$$

и обозначим для $l > 0$

$$U'' = U''(l, V, \varepsilon) = \{(I_0, \varphi_0): \text{mes } M > l\varepsilon^{-1}, (I_0, \varphi_0) \in U\}, \quad U' = U \setminus U''.$$

Л е м м а 1. Если $\mu = c_{18}(l + \delta + \varepsilon \kappa^{-2} + \varepsilon \kappa^{-2} l |\ln \delta|^{n+1}) < 0.5$, ρ_0 , $\delta < 0.5$, $\kappa < 1$, то при $(I_0, \varphi_0) \in U'$ и $0 \leq t \leq a\varepsilon^{-1}$ решение $I(t)$ определено и выполнено $\|I(t) - \bar{I}(t)\| < \mu$.

Л е м м а 2 (1). При $\mu < 0.5 \rho_0$ выполнено

$$\text{mes } U'' < c_5 l^{-1} \text{mes } V.$$

Выберем $l = \delta = (4c_{18})^{-1} \rho$, $\kappa = (4c_{18} \varepsilon \rho^{-1})^{1/2}$. Пусть $c_{19} \varepsilon < \rho < c_{20}^{-1}$, где c_{19} и c_{20} выберем достаточно большими, так что выполнено $\rho < 0.5 \rho_0$, $\delta < 0.5$, $\kappa < 1$ и $l |\ln \delta|^{n+1} < 1$. Тогда удовлетворяются условия лемм 1, 2 и $\mu < \rho$. В силу леммы 1 будет $\|I(t) - \bar{I}(t)\| < \rho$ при $0 \leq t \leq a\varepsilon^{-1}$, т. е. $H(\rho, \varepsilon) \subset U''$. Тогда из леммы 2 и (4) следует

$$\text{mes } H(\rho, \varepsilon) \leq \text{mes } U'' < c_4 c_5 l^{-1} \kappa$$

(измеримость $H(\rho, \varepsilon)$ доказана в (1)). Подставляя сюда κ и l , получим $\text{mes } H(\rho, \varepsilon) < c_{21} (\varepsilon/\rho^3)^{1/2}$.

З а м е ч а н и е. Условие 4°) п. 2 использовалось только как достаточное условие для справедливости (4). Если 4°) не выполнено, можно воспользоваться другими условиями, в частности,

$$\omega_1 \neq 0, \quad \text{rang} \left[\left(\frac{\partial \omega_2 \omega_1^{-1}}{\partial I} \right)^T, \dots, \left(\frac{\partial \omega_n \omega_1^{-1}}{\partial I} \right)^T \right] = n-1.$$

4. Доказательство леммы 1. Пусть $(I_0, \varphi_0) \in U$. Найдется $\tau > 0$ такое, что $I(t) = I(t, I_0, \varphi_0, \varepsilon)$ определено при $0 \leq t \leq \tau$, причем либо $\tau = a\varepsilon^{-1}$ либо $\tau < a\varepsilon^{-1}$ и $d(I(\tau), \partial G) = 0,25\rho_0$. Рассмотрим соответствующее этому решению множество M . Следуя ⁽¹⁾, для любого $h > 0$ введем $M_1 = M_1(M, h, \varepsilon)$ — объединение всех сегментов длины не меньшей $h\varepsilon^{-1}$, целиком входящих в M . Число таких сегментов, очевидно, не превосходит lh^{-1} .

Введем $\Lambda = [0, \tau] \setminus \overline{M_1}$ (черта обозначает замыкание); это множество является объединением не более чем $lh^{-1} + 1$ сегментов, которые обозначим $[\alpha_s, \beta_s]$:

$$0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_p \leq \beta_p \leq \tau, \quad p \leq lh^{-1} + 1.$$

Пусть $\left\| \frac{\partial \omega}{\partial I} f \right\| < c_6$ в G . Выберем $h = 0,5 c_6^{-1} \kappa N^{-(n+1)} = c_7^{-1} \kappa |\ln \delta|^{-(n+1)}$.

Если теперь $t \in \Lambda$, то либо $t \notin M$ и тогда $|(k, \omega(I(t)))| > \kappa \|k\|^{-n}$ при $1 \leq \|k\| \leq N$, либо $t \in \overline{M} \setminus M_1$. В последнем случае найдется $t_1 \notin M$, $|t_1 - t| < h\varepsilon^{-1}$. Тогда

$$|(k, \omega(I(t)))| > |(k, \omega(I(t_1)))| - c_6 \|k\| h \geq \kappa \|k\|^{-n} - 0,5 \kappa \|k\| N^{-(n+1)} \geq \geq 0,5 \kappa \|k\|^{-n}.$$

Следовательно, при $t \in \Lambda$ будет $|(k, \omega(I(t)))| > 0,5 \kappa \|k\|^{-n}$. В частности, при $t \in \Lambda$ можно определить $u(t) \equiv u(I(t), \varphi(t))$, где

$$u(I, \varphi) = - \sum_{1 \leq \|k\| \leq N} \frac{f_k(I) \cdot e^{i(k, \varphi)}}{i(k, \omega(I))}.$$

Так как ⁽⁴⁾ $\|f_k\| < c_8 e^{-\sigma \|k\|}$, то

$$\|u\| < \sum_{1 \leq \|k\| \leq N} \frac{c_8 e^{-\sigma \|k\|}}{0,5 \kappa \|k\|^{-n}} < c_9 \kappa^{-1}.$$

Аналогично, если $\kappa < 1$, то

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right\| < c_{10} \kappa^{-1}, \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial I} \right\| < c_{11} \kappa^{-2}.$$

Следуя идее асимптотических методов ⁽⁶⁾, введем $\tilde{I}(t) = I(t) + \varepsilon u(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{I}}{dt} &= \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \varphi} (\omega + \varepsilon g) + \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial I} f = \varepsilon f_0(\tilde{I}) + \varepsilon [f_0(I) - \\ &- f_0(I + \varepsilon u)] + \varepsilon R_N + \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} g + \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial I} f + \varepsilon [f(I, \varphi, \varepsilon) - f(I, \varphi, 0)] \end{aligned}$$

(в дальнейшем ε , l , κ и δ выбираются так, чтобы $\tilde{I} \in G$). Поэтому при $t \in \Lambda$ будет

$$\frac{d\tilde{I}}{dt} = \varepsilon f_0(\tilde{I}) + \varepsilon \psi,$$

где $\|\psi\| < c_{12}(\varepsilon \kappa^{-2} + \delta)$,

$$\frac{d\tilde{I}}{dt} = \varepsilon f_0(\tilde{I}).$$

Тогда при $\alpha_s \leq t \leq \beta_s$

$$\begin{aligned} \|\tilde{I}(t) - \tilde{I}(t)\| &< e^{c_{13}\varepsilon(\beta_s - \alpha_s)} \left[\|\tilde{I}(\alpha_s) - \tilde{I}(\alpha_s)\| + \varepsilon \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \|\psi\| dt \right] < \\ &< e^{c_{13}\varepsilon(\beta_s - \alpha_s)} [\|\tilde{I}(\alpha_s) - \tilde{I}(\alpha_s)\| + c_{12}(\beta_s - \alpha_s)(\varepsilon^2 \kappa^{-2} + \varepsilon \delta)]. \end{aligned}$$

Так как $\|I(t) - \bar{I}(t)\| = \varepsilon \|u\| < c_9 \varepsilon \kappa^{-1}$, $e^{c_{13} \varepsilon (\beta_s - \alpha_s)} < e^{c_{13} a}$, то получим оценку

$$\begin{aligned} \|I(t) - \bar{I}(t)\| &< e^{c_{13} \varepsilon (\beta_s - \alpha_s)} \cdot \|I(\alpha_s) - \bar{I}(\alpha_s)\| + c_{14} \varepsilon \kappa^{-1} + \\ &+ c_{15} (\beta_s - \alpha_s) (\varepsilon^2 \kappa^{-2} + \varepsilon \delta). \end{aligned} \quad (5)$$

В частности, это верно при $t = \beta_s$.

Кроме того,

$$\begin{aligned} \|I(\alpha_{s+1}) - \bar{I}(\alpha_{s+1})\| &\leq \|I(\beta_s) - \bar{I}(\beta_s)\| + \|I(\alpha_{s+1}) - I(\beta_s)\| + \\ &+ \|\bar{I}(\alpha_{s+1}) - \bar{I}(\beta_s)\|. \end{aligned} \quad (6)$$

Примем, для определенности, что $\alpha_1 = 0$, $\beta_p = \tau$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{p-1} \|I(\alpha_{s+1}) - I(\beta_s)\| &< \varepsilon c_{16} \sum_{s=1}^{p-1} (\alpha_{s+1} - \beta_s) \leq c_{16} l, \\ \sum_{s=1}^{p-1} \|\bar{I}(\alpha_{s+1}) - \bar{I}(\beta_s)\| &< c_{16} l. \end{aligned} \quad (7)$$

Последовательно применяя (5) при $t = \beta_s$, (6) и учитывая (7), найдем, что при $0 \leq t \leq \tau$

$$\begin{aligned} \|I(t) - \bar{I}(t)\| &< e^{c_{13} a} \left\{ \sum_{s=1}^p c_{14} \varepsilon \kappa^{-1} + c_{15} (\varepsilon^2 \kappa^{-2} + \varepsilon \delta) \sum_{s=1}^p (\beta_s - \alpha_s) + \right. \\ &\left. + 2c_{16} l \right\} < c_{17} [c_{14} (lh^{-1} + 1) \varepsilon \kappa^{-1} + c_{15} a (\delta + \varepsilon \kappa^{-2}) + 2c_{16} l], \end{aligned}$$

или

$$\|I(t) - \bar{I}(t)\| < c_{18} (l + \delta + \varepsilon \kappa^{-2} + \varepsilon \kappa^{-2} l |\ln \delta|^{n+1}) = \mu. \quad (8)$$

По условию леммы $\mu < 0,5\rho_0$. Поэтому при $t = \tau$ получим

$$d(I(\tau), \partial G) \geq d(\bar{I}(\tau), \partial G) - \|I(\tau) - \bar{I}(\tau)\| > \rho_0 - \mu > \rho_0 - 0,5\rho_0 > 0,25\rho_0.$$

Поэтому $\tau = a\varepsilon^{-1}$ и оценка (8) справедлива при $0 \leq t \leq a\varepsilon^{-1}$.

Автор благодарит М. Л. Лидова, В. И. Арнольда и Д. В. Аносова за обсуждение работы и сделанные замечания.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Д. В. Аносов, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 24, № 5, 721 (1960). ² T. Kasuga, Proc. Japan. Acad., v. 37, N 7, 366, 372, 377 (1961). ³ V. I. Arnold, A. Avez, Ergodic Problems of Classical Mechanics, N. Y., 1968. ⁴ В. И. Арнольд, ДАН, т. 161, № 1, 9 (1965). ⁵ В. М. Алексеев, Прим. ред. к кн. Ю. Мозер: Лекции о гамильтоновых системах, М., 1973, стр. 137. ⁶ Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., 1963.