

УДК 517.392

МАТЕМАТИКА

Академик С. Л. СОБОЛЕВ

СХОДИМОСТЬ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ НА БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

В книге автора ⁽¹⁾, гл. XVIII, приведена оценка сверху быстроты сходимости кубатурных формул на некоторых классах бесконечно дифференцируемых функций. В настоящей заметке мы уточняем эту оценку и показываем, что она не может быть существенно улучшена.

Для аналитических функций этот результат был установлен С. Ю. Прищепиным.

Определим класс функций $\mathcal{H}(\kappa, A, \lambda)$, заданных в области Ω , как класс состояний из бесконечно дифференцируемых функций и притом таких, что

$$\|\varphi\|_{L_2^{(m)}(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (\mathcal{D}^{\alpha} \varphi)^2 dx \right\}^{1/2} \leq K m^{\kappa m} A^m m^{\lambda}. \quad (1)$$

Для классов $\mathcal{H}$ имеют место естественные соотношения вложения для любого $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\kappa, A, \lambda - \varepsilon) &\subset \mathcal{H}(\kappa, A, \lambda); & \mathcal{H}(\kappa, A - \varepsilon, \lambda_1) &\subset \mathcal{H}(\kappa, A, \lambda_2); \\ \mathcal{H}(\kappa - \varepsilon, A_1, \lambda_1) &\subset \mathcal{H}(\kappa, A_2, \lambda_2). \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначим еще

$$\mathcal{H}(\kappa, A - 0) = \bigcup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}(\kappa, A - \varepsilon, \lambda), \quad \mathcal{H}(\kappa, A + 0) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}(\kappa, A + \varepsilon, \lambda). \quad (3)$$

Вместо $\mathcal{H}$ можно рассматривать классы $C(\kappa, A, \lambda)$, состоящие из функций, для которых выполнены неравенства

$$\|\varphi\|_{C^{(m)}(\Omega)} = \left\{ \max_{|\alpha|=m} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (\mathcal{D}^{\alpha} \varphi)^2 \right\}^{1/2} \leq K m^{\kappa m} A^m m^{\lambda}. \quad (4)$$

Классы $\mathcal{H}$ и C связаны соотношениями вложения

$$C(\kappa, A, \lambda) \subset \mathcal{H}(\kappa, A, \lambda), \quad \mathcal{H}(\kappa, A, \lambda) \subset C(\kappa, A, \lambda + k\kappa), \quad (5)$$

где $k = [n/2] + 1$, доказываемые на основе обычных теорем вложения. Пространство $\Phi(\beta, A)$ из книги ⁽¹⁾ совпадает с $C(\beta + 1, A/e - 0)$.

Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{H}(\kappa, A, \lambda)$ — периодическая функция с единичной матрицей переводов, а Ω — единичный куб $0 \leq x_j \leq 1$. Оценим величину погрешности $|(l, \varphi)|$, где

$$l(x) = 1 - \sum_{\beta} h^{\kappa} \delta(x - h\beta), \quad h = \frac{1}{N}, \quad \beta_j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (6)$$

Функционал погрешности l оптимален в $L_2^{(m)}$ при всех m среди функционалов, имеющих ту же систему узлов. Норма его

$$\|l\|_{L_2^{(m)*}} = \left(\frac{h}{2\pi} \right)^m \sqrt{\zeta(I|2m)}. \quad (7)$$

В силу (1) и (7) будем иметь, пользуясь ограниченностью ζ -функции Эвштейна,

$$|(l, \varphi)| \leq K m^{*m} \left(\frac{Ah}{2\pi} \right)^m m^\lambda. \quad (8)$$

Величина $|(l, \varphi)|$ от m не зависит и меньше любого из значений правой части. Подставляя в (8) вместо m число

$$m_0 = \frac{1}{e} \left(\frac{Ah}{2\pi} \right)^{-1/\kappa}, \quad (9)$$

при котором произведение первых двух сомножителей минимально, получим оценку

$$|(l, \varphi)| < K e^{-Bh^{-1/\kappa}} h^{-\lambda/\kappa}, \quad B = \frac{\kappa}{e} \left(\frac{A}{2\pi} \right)^{-1/\kappa}. \quad (10)$$

Оценка (10) служит уточнением формулы (XVIII, 3.13) из книги (1). Для функций вида

$$\varphi_0(x) = \sum_{\beta \neq 0} a(|\beta|) e^{2\pi i \beta x}, \quad (11)$$

где

$$a(|\beta|) = e^{-B|\beta|^{1/\kappa}} |\beta|^\mu, \quad (12)$$

будем иметь

$$\|\varphi_0\|_{L_2^{(m)}}^2 \sum_{\beta \neq 0} a(|\beta|)^2 (2\pi\beta)^{2m} = (2\pi)^{2m} \sum_{\beta \neq 0} e^{-2B|\beta|^{1/\kappa}} |\beta|^{2\mu+2m}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} (l, \varphi) &= - \sum_{|\beta| \neq 0} h^n a(|\beta|) \sum_{k=1}^n e^{2\pi i k \beta / N} = - \sum_{|\beta| \neq 0} a(N|\beta|) = \\ &= - \sum_{\substack{\beta \equiv 0 \pmod{N} \\ \beta \neq 0}} e^{-B|\beta|^{1/\kappa}} |\beta|^\mu = - \sum_{\beta \neq 0} e^{-BN^{1/\kappa} |\beta|^{1/\kappa}} N^\mu |\beta|^\mu. \end{aligned} \quad (14)$$

Оценим суммы (13) и (14). Множество B целых точек в $\mathbb{R}^n$ разобьем на подмножества в соответствии со знаками координат этих точек. Множество тех β , у которых

$$\beta_{j_1} > 0, \quad \beta_{j_2} > 0, \dots, \beta_{j_l} > 0, \quad \beta_{j_{s+1}} < 0, \quad \beta_{j_{s+2}} < 0, \dots, \beta_{j_s} < 0, \\ \beta_{j_{r+1}} = \beta_{j_{r+2}} = \dots = \beta_{j_n} = 0,$$

обозначим через $B^{(\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \rho^{(3)})}$, где $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \rho^{(3)}$ — мантиссы двоичных n -значных дробей такие, что

$$\begin{aligned} \rho_{j_k}^{(1)} &= \begin{cases} 1, & k=1, 2, \dots, s, \\ 0, & k=s+1, \dots, n; \end{cases} \quad \rho_{j_k}^{(2)} = \begin{cases} 1, & k=s+1, s+2, \dots, s, \\ 0, & k=1, 2, \dots, s; \end{cases} \\ \rho_{j_k}^{(3)} &= \begin{cases} 1, & k=r+1, r+2, \dots, n, \\ 0, & k=1, 2, \dots, r. \end{cases} \end{aligned}$$

Множества $B^{(\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \rho^{(3)})}$, где $\rho^{(1)} \cup \rho^{(2)} \cup \rho^{(3)} \neq 1 - 2^{-n}$, будем считать пустыми. Для любой функции $\psi(\beta)$ имеем

$$\sum_{\beta} \psi(\beta) = \sum_{\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \rho^{(3)}} \sum_{\beta \in B^{(\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \rho^{(3)})}} \psi(\beta). \quad (15)$$

Для функций ψ , зависящих только от $|\beta|$, получим

$$\sum_{\beta \in B^{(\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \rho^{(3)})}} \psi(|\beta|) = \sum_{\beta \in \mathcal{N}_r} \psi(|\beta|),$$

где $\mathcal{K}_r$ — множество целых точек с положительными координатами r -мерного пространства. Число различных $B^{(\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \rho^{(3)})}$ размерности r равно $2^r [n!/r!(n-r)!]$, и, значит,

$$\sum_{\beta}^g \psi(|\beta|) = \sum_{r=0}^n 2^r \frac{n!}{r!(n-r)!} \sum_{\beta \in \mathcal{K}_r} \psi(|\beta|). \quad (15)$$

Полагая, например,

$$\omega_x(|\beta|) = \begin{cases} 1, & |\beta| < x, \\ 0, & |\beta| \geq x, \end{cases}$$

получим

$$\sum_{\beta \in \mathcal{K}_r} \omega_x(|\beta|) = \mathcal{K}_r(x),$$

где $\mathcal{K}_r(x)$ — число целых точек из $\mathcal{K}_r$, лежащих внутри шара $|\beta| < x$. Из (16) следует

$$\frac{A_n(x)}{n!} = \sum_{r=0}^n \frac{1}{(n-r)!} \frac{2^r \mathcal{K}_r(x)}{r!}, \quad (17)$$

где $A_n(x)$ — известная числовая функция, выражающая число целых точек внутри n -мерного шара радиуса x . Из (17) следует

$$\frac{2^r \mathcal{K}_r(x)}{r!} = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{(r-j)!} \frac{A_j(x)}{j!}. \quad (18)$$

Через функции $\mathcal{K}_r(x)$ выражается функция $N_n(x)$ — число целых точек границы 1-го координатного угла, лежащих внутри единичного шара с неотрицательными координатами:

$$N_n(x) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{n!}{r!(n-r)!} \mathcal{K}_r(x). \quad (19)$$

Для оценки нормы функции $\varphi_0(x)$ рассмотрим интеграл

$$J_n = \int_{x_j > 0} e^{-2Br^{1/\kappa}} r^{2m+2\mu} dx = \frac{\pi^{n/2} \cdot 2^{1-n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \kappa \frac{\Gamma(\kappa(2m+2\mu+n))}{(2B)^{\kappa(2m+2\mu+n)}}.$$

Разобьем область интегрирования на кубики Q_β со стороны ребра единицы: $Q_\beta = \{x: \beta_j \leq x_j \leq \beta_j + 1\}$. Через каждую точку $\beta^{(0)} \in \mathcal{K}_n \setminus \mathcal{K}_n$ проведем луч C

$$x_j = \beta_j^{(0)} + t, \quad t > 0. \quad (20)$$

Каждый луч (20) состоит из диагоналей кубиков Q_β , нанизанных на него как бусы, причем все кубики пространства окажутся пронизанными такими лучами.

Вдоль каждого луча величина r возрастает, а функция $e^{-2Br^{1/\kappa}} r^{2m+2\mu}$ монотонно растет при $r \leq r_{\max} = (\kappa(m+\mu)/B)^\kappa$, где она равна $(\kappa(m+\mu)/B)^{2\kappa(m+\mu)}$, и монотонно убывает при $r_{\max} \leq r$. Заменив интеграл по каждому Q_β минимальным значением подынтегральной функции, будем иметь

$$J_n < \sum_{\beta \in B^-} e^{-2B|\beta|^{1/\kappa}} |\beta|^{2m+2\mu}, \quad (21)$$

где B^- — множество точек, являющихся точкой минимума $e^{-2B|\beta|^{1/\kappa}} |\beta|^{2m+2\mu}$ в каком-либо Q_β (если в Q_β таких точек две, то в B^- включим точку β).

На каждом луче (20), где $|\beta^0| < r'_{\max}$, лежит одна точка, не принадлежащая B^- ; множество таких точек назовем $B^{(\text{экс})}$. Очевидно,

$$\sum_{\beta \in B^{(\text{экс})}} e^{-2B|\beta|^{1/\kappa}} |\beta|^{2m+2\mu} \leq N_n(r_{\max}) \left(\frac{\kappa(m+\mu)}{B} \right)^{2\kappa(m+\mu)}. \quad (22)$$

Из (13), (21) и (22) после некоторых выкладок получаем

$$\Phi_0(x) \in \mathcal{H} \left(\kappa, 2\pi \left(\frac{\kappa}{Be} \right)^{\kappa}, \kappa(\mu+n/2) + \max \left(-\frac{1}{4}, -\frac{\kappa}{2} \right) \right) = \mathcal{H}(\kappa, A, \lambda). \quad (23)$$

Для $|(l, \varphi)|$, сохраняя в сумме (14) при больших N лишь $2n$ первых слагаемых, будем иметь

$$|(l, \varphi)| \geq K e^{-Bh^{-1/\kappa}} h^{-\lambda/\kappa + n/2 - \min(1/4\kappa, 1/2)}. \quad (24)$$

Зазор между оценками (10) и (24) выражается множителем $h^{n/2 - \min(1/4\kappa, 1/2)}$, убывающим медленнее любой экспоненты $e^{-\varepsilon h^{-1/\kappa}}$.

Из сказанного вытекает неудлучшаемость в существенном оценки погрешности формул с пограничным слоем и, следовательно, бесполезность использования пограничного слоя более высокого порядка, чем

$$m_0 = \frac{1}{e} \left(\frac{Ah}{2\pi} \right)^{-1/\kappa}.$$

Рассмотрим N^n функций $\varphi_\beta(x) = \varphi(x - \beta h)$, интегрируемых в кубе по произвольной кубатурной формуле с узлами βh . Среднее арифметическое погрешностей этих формул будет

$$\frac{1}{N^n} \sum_{\beta} (l, \varphi_\beta) = \sum_{\beta} \frac{1}{N^n} (l(x - \beta h), \varphi) = (l_0, \varphi),$$

где l_0 — оптимальный функционал погрешности, и больше чем $K e^{-Bh^{-1/\kappa}} h^{-\lambda/\kappa + n/2 - \min(1/4\kappa, 1/2)}$.

Но если среднее арифметическое N^n чисел больше некоторого числа, то, по крайней мере, одно из слагаемых больше этого числа. Значит, хоть для одной из $\varphi_\beta(x)$ погрешность неудлучшаема.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
21 IV 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Л. Соболев, Введение в теорию кубатурных формул, М., «Наука», 1974.