

УДК 517.948

МАТЕМАТИКА

В. П. МАСЛОВ, А. М. ЧЕБОТАРЕВ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ХАРТРИ В ВИДЕ Т-ОТОБРАЖЕНИЯ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 17 I 1975)

Пусть $\mathbf{B}$ — банахово пространство и $\text{Op } \mathbf{B}$ — алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathbf{B}$. Предположим, что на $\mathbf{B}$ определен нелинейный оператор $\mathfrak{A}: \mathbf{B} \rightarrow \text{Op } \mathbf{B}$, обладающий следующими свойствами: (I) существуют такие $\varepsilon > 0$ и $D: |D| < \infty$, что при всех $\tau \in (0, \varepsilon]$ для любого $\psi \in \mathbf{B}$ выполнена оценка $\|\exp i\mathfrak{A}(\psi)\tau\|_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}} \leq \exp D\tau$; (II) $\mathfrak{A}A(\lambda) \in C(\mathbf{R}^1): \|\mathfrak{A}(\psi)\|_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}} \leq A(\|\psi\|_{\mathbf{B}})$; (III) $\mathfrak{A}C(\lambda, \mu) \in C(\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1): \|\mathfrak{A}(\psi_1) - \mathfrak{A}(\psi_2)\|_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}} \leq C(\|\psi_1\|_{\mathbf{B}}, \|\psi_2\|_{\mathbf{B}})\|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathbf{B}}$.

Пусть далее $K(t)$ — квазиограниченная непрерывная полугруппа операторов, действующих в $\mathbf{B}$:

$$K(t) \circ K(\tau) = K(t + \tau); \quad \|K(t)\|_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}} \leq \exp \rho t; \quad \lim_{\tau \downarrow 0} K(\tau)\psi = \psi \quad \forall \psi \in \mathbf{B}.$$

Для $u_0 \in \mathbf{B}$ положим $\psi_N(0) = u_0$ и рассмотрим последовательность функций (см. (1, 2))

$$\psi_N(tN^{-1}l) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_N(l) \stackrel{\text{def}}{=} T_N(tN^{-1}l, u_0) = \tag{1}$$

$$= \left[K(tN^{-1}) \dots K(tN^{-1}) \exp itN^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} A(\psi_N(j)) \right] u_0; \quad l=1, 2, \dots, N; \quad N=1, 2, \dots$$

Формула (1) определяет последовательность нелинейных операторов $\{T_N(t, \cdot)\}$, действующих в $\mathbf{B}$: $\psi_N(t) \stackrel{\text{def}}{=} T_N(t, u_0)$. В соответствии с (1, 2) будем говорить, что последовательность $\{T_N(t, \cdot)\}$ определяет Т-отображение $T(t, \cdot)$, если для любого $u_0 \in \mathbf{B}$ существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_N(t, u_0) \stackrel{\text{def}}{=} T(t, u_0).$$

Из формулы (1) и условия (I) немедленно следует оценка

$$\|\psi_N(l)\|_{\mathbf{B}} \leq \|u_0\|_{\mathbf{B}} \exp t(\rho + D), \tag{2}$$

обеспечивающая равномерную ограниченность последовательности $\{\psi_N(l)\}$ по N и l .

Лемма. Если выполнены условия (I) и (II), то функция $\psi_N(l)$ может быть представлена в виде

$$\psi_N(l) = K(tN^{-1}l)u_0 + O(N^{-1}) + i \sum_{j=0}^{l-1} tN^{-1}K(tN^{-1}(l-j-1)) \circ \mathfrak{A}(\psi_N(j))\psi_N(j). \tag{3}$$

Доказательство. Поскольку последовательность $\{\psi_N(l)\}$ равномерно ограничена, то $\{\mathfrak{A}(\psi_N(l))\}$ — равномерно ограниченная последовательность операторов. Следовательно,

$$\exp itN^{-1}\mathfrak{A}(\psi_N(l)) = 1 + itN^{-1}\mathfrak{A}(\psi_N(l)) + O(N^{-2}), \tag{4}$$

где $\|O(N^{-2})\|_{\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}} \leq CN^{-2}$, а постоянная C не зависит от l и N .

Систематически используя (1) и (4), получаем

$$\begin{aligned}\psi_N(l) &= K(tN^{-1})\psi_N(l-1) + itN^{-1}K(tN^{-1}) \circ \mathfrak{A}(\psi_N(l-1))\psi_N(l-1) + O(N^{-2}), \\ K(tN^{-1})\psi_N(l-1) &= K(2tN^{-1})\psi_N(l-2) + \\ &+ itN^{-1}K(2tN^{-1}) \circ \mathfrak{A}(\psi_N(l-2))\psi_N(l-2) + O(N^{-2}), \\ &\dots \dots \dots \\ K(tN^{-1}(l-1))\psi_N(1) &= K(tN^{-1}l)\psi_N(0) + \\ &+ itN^{-1}K(tN^{-1}l) \circ \mathfrak{A}(\psi_N(0))\psi_N(0) + O(N^{-2}).\end{aligned}$$

Сумма левых и правых частей этих формул дает (3). Лемма доказана.

Заметим, что, располагая априорно ограниченной последовательностью $\{\psi_N(l)\}$, мы не делаем никаких предположений о равномерной ограниченности операторов $\mathfrak{A}(\psi)$.

Теорема. Если выполнены условия (I)–(III), то существует $\mathbf{T}$ -отображение $\mathbf{T}(t, \cdot): \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$, определяемое последовательностью (1). Для любого $u_0 \in \mathbf{B}$ функция $\mathbf{T}(t, u_0)$ непрерывна по параметру t .

Доказательство. Достаточно доказать, что последовательность $\{\psi_N(t)\}$ фундаментальна в $\mathbf{B}$, а предельная функция непрерывна по t .

Пусть $m = m(N) \leq N$ и $1 \leq l \leq N$. Убедимся, что если $mN^{-1} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, то

$$\|\psi_N(l+m) - \psi_N(l)\|_{\mathbf{B}} \rightarrow 0$$

равномерно по l .

В самом деле, из формулы (3) имеем

$$\begin{aligned}\psi_N(l+m) - \psi_N(l) &= K(tN^{-1}l)(K(tN^{-1}m)u_0 - u_0) + O(N^{-1}) + \\ &+ i \sum_{j=0}^{m-1} tN^{-1}K((m+l-j-1)tN^{-1}) \circ \mathfrak{A}(\psi_N(j))\psi_N(j) + \\ &+ i \sum_{j=0}^{l-1} tN^{-1}K((l-j-1)tN^{-1}) \circ (\mathfrak{A}(\psi_N(j+m))\psi_N(j+m) - \mathfrak{A}(\psi_N(j))\psi_N(j)).\end{aligned}\tag{5}$$

На любом конечном отрезке оператор $K(t)$ равномерно ограничен и $\|K(tN^{-1}m)u_0 - u_0\|_{\mathbf{B}} = \varepsilon_N \rightarrow 0$ при $N^{-1}m \rightarrow 0$. Поэтому из (II) и (5) получаем рекуррентную систему неравенств

$$a_N(0) \leq c\varepsilon_N,$$

$$a_N(l) \leq c \left[\varepsilon_N + m(N)N^{-1} + \sum_{j=0}^{l-1} tN^{-1}a_N(j) \right], \quad l=1, 2, \dots, N,$$

где $a_N(j) = \|\psi_N(j+m(N)) - \psi_N(j)\|_{\mathbf{B}}$. Отсюда мы заключаем

$$a_N(l) \leq \gamma_N, \quad (6)$$

где $\gamma_N = c[\varepsilon_N + m(N)N^{-1}] \exp c_1 t$, а c и c_1 — некоторые постоянные. Поскольку $\gamma_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, то $a_N(l) \rightarrow 0$ равномерно по l .

Фундаментальность последовательности $\{\psi_N(t)\}$ доказывается аналогично. Достаточно проверить, что при $M, N \rightarrow \infty$

$$\|\psi_N(t) - \psi_{MN}(t)\|_{\mathbf{B}} \rightarrow 0.$$

Обозначим $N_1 = MN$. Как нетрудно видеть,

$$0 \leq lN_1^{-1} - [l/M]N^{-1} \leq N^{-1}.$$

Теперь из (6) имеем

$$\psi_{N_1}(lN_1^{-1}) = \psi_{N_1}([l/M]N^{-1}) + O(\gamma_N).$$

Поэтому

$$\psi_{N_1}(lN^{-1}) = K(tN^{-1}l)u_0 + O(\gamma_N) +$$

$$+ i \sum_{j=0}^{l-1} tN^{-1}K(tN^{-1}(l-j-1)) \circ \mathfrak{A}(\psi_{N_1}(jN^{-1})) \psi_{N_1}(jN^{-1}).$$

Отсюда получаем рекуррентную систему оценок для нормы разности $\|\psi_N(lN^{-1}) - \psi_{N_1}(lN^{-1})\|_{\mathbf{B}} \stackrel{\text{def}}{=} a_{M,N}(l)$:

$$a_{M,N}(0) \leq \alpha_N,$$

$$a_{M,N}(l) \leq \alpha_N + Ct \sum_{j=0}^{l-1} N^{-1} a_{M,N}(j), \quad l=1, 2, \dots, N,$$

где $\alpha_N = O(\gamma_N)$. Отсюда следует равномерная по l оценка:

$$a_{M,N}(l) \leq \alpha_N \exp C_1 t,$$

обеспечивающая фундаментальность последовательности $\{\psi_N(t)\}$. Непрерывность предельной функции следует из оценки (6). Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Предельная функция является ограниченным в $\mathbf{B}$ решением интегрального уравнения*

$$\psi(t) = K(t)u_0 + i \int_0^t d\tau K(t-\tau) \circ \mathfrak{A}(\psi(\tau)) \psi(\tau). \quad (7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что из сходимости последовательности $\{\psi_N(ktN^{-1})\}$ при $ktN^{-1} \rightarrow \tau$ к непрерывной функции $\psi(\tau)$ следует сходимость римановых сумм к интегралу в смысле Римана от непрерывной функции со значениями в банаховом пространстве $\mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} tN^{-1}K(tN^{-1}(N-j-1)) \circ \mathfrak{A}(\psi_N(tN^{-1}j)) \psi_N(tN^{-1}j) = \\ = \int_0^t d\tau K(t-\tau) \circ \mathfrak{A}(\psi(\tau)) \psi(\tau). \end{aligned}$$

Совершая теперь предельный переход в правой и левой частях формулы (3) при $N \rightarrow \infty$, получим (7). Утверждение доказано.

Если $\mathfrak{D}$ — производящий оператор полугруппы $K(t)$, то, дифференцируя правую и левую части (7) по t , получаем следующую задачу Коши для функции $\psi(t)$:

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dt} \psi(t) = \mathfrak{D}(t) \psi(t) + \mathfrak{A}(\psi(t)) \psi(t), \quad \psi(t)|_{t=0} = u_0.$$

Рассмотрим банахово пространство $\mathbf{B} = \mathcal{L}_{2,m}(\mathbf{R}^n)$, состоящее из векторов $\psi(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_m(x))$ с конечной нормой

$$\|\psi\|_{\mathcal{L}_{2,m}(\mathbf{R}^n)} = \left\{ \sum_{j=1}^m \int_{\mathbf{R}^n} dx |\psi_j(x)|^2 \right\}^{1/2}.$$

Сопоставим вектору $\psi(x)$ эрмитову матрицу $\mathfrak{A}(\psi) = \|A_{ij}(\psi)\|$:

$$A_{ij}(\psi) = v_{ij}(x) + \sum_{l=1}^m \int_{\mathbf{R}^n} dy a_{ij}^l(x-y) |\psi_l(y)|^2, \quad (8)$$

где $a_{ij}^l(x)$ и $v_{ij}(x)$ — непрерывные ограниченные функции, удовлетворяющие условиям, обеспечивающим эрмитовость матрицы $\mathfrak{A}(\psi)$: $a_{ij}^l = \bar{a}_{ji}^l$, $v_{ij} = \bar{v}_{ji}$. В качестве функций A , C и D из условий (I) — (III) можно принять

$$A(\lambda) = m(v + a\lambda^2), \quad C(\lambda, \mu) = am\sqrt{2(\lambda^2 + \mu^2)}, \quad D=0,$$

где

$$v = \max_{i,j} \sup_x |v_{ij}(x)|, \quad a = \max_{i,j,k} \sup_x \|a_{ij}^k(x)\|.$$

Пусть далее $K(t)$ — унитарная непрерывная группа операторов, действующих в $\mathcal{L}_{2,m}(\mathbf{R}^n)$ и определяемая из условий

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dt} K(t) = \frac{1}{2} \Delta \circ K(t), \quad K(0) = I,$$

где I — единичная матрица размера $m \times m$, а через Δ обозначена диагональная матрица размера $m \times m$, диагональными элементами которой являются операторы Лапласа в $\mathbf{R}^n$.

Из доказанной выше теоремы следует существование в $\mathcal{L}_{2,m}(\mathbf{R}^n)$ предела последовательности функций $\psi_N(t, x)$, определенных соотношениями (3), (8), причем предельная функция является ограниченным решением задачи Коши

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = \frac{1}{2} \Delta \psi(t, x) + \mathfrak{A}(\psi(t, x)) \psi(t, x), \quad (9)$$

$$\psi(t, x) |_{t=0} = u_0(x)$$

для уравнения типа Хартри.

Следуя (1, 2), будем называть псевдодифференциальный оператор $S(p, x, t, \tau)$ инфинитезимальным оператором задачи Коши

$$\frac{1}{i} \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} = H_{\text{оп}}(t, \psi) \psi(t, x), \quad \psi(t, x) |_{t=0} = u_0(x),$$

если

$$\psi(t, x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S(p, x, t, \delta) \circ S(p, x, t - \delta, \delta) \circ \dots \circ S(p, x, t - (N-1)\delta, \delta) u_0(x),$$

где $\delta = tN^{-1}$. Инфинитезимальные операторы задачи Коши для уравнения Шредингера легко вычислить, исходя из результатов (3-5). Если матрица (8) диагональная, $v_{ii}(x) = V(x)$, $a_{ii}^i(x) = 0$, и $a_{il}^j(x) = a(x)$ при $j \neq l$, то задача Коши (9) является задачей Коши для уравнения Хартри. На основании формулы (3) и доказанной выше теоремы нетрудно вычислить символ инфинитезимального оператора этой задачи: $S(p, x, t, \tau)$ — диагональная матрица размера $m \times m$, ее j -й диагональный элемент

$$S_j(p, x, t, \tau) = \exp i\tau \left\{ \frac{|p|^2}{2} - V(x) + \sum_{l \neq j} \int_{\mathbf{R}^n} dy a(x-y) |\psi_l(y, t-\tau)|^2 \right\}. \quad (10)$$

Формула (10) показывает, что в нелинейных коэффициентах уравнения Хартри можно использовать «запаздывающие» значения функции состояния.

Московский институт
электронного машиностроения

Поступило
16 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. П. Маслов, Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана, М., «Наука», 1975. ² В. П. Маслов, М. В. Карасев, Системы канонических интегродифференциальных уравнений, М., «Наука», 1974. ³ Р. П. Фейнман, Пространственно-временной подход к нерелятивистской квантовой механике. Сборн. Вопросы причинности в квантовой механике, М., ИЛ, 1955, стр. 167. ⁴ R. H. Cameron, D. A. Storvick, J. Math. Anal. Appl., v. 42, № 2, 330 (1973). ⁵ E. Nelson, J. Math. Phys., v. 5, № 3, 332 (1964).