

В. Е. НЕУВАЖАЕВ

К ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

(Представлено академиком Е. И. Забабахиным 12 VIII 1974)

С. З. Бельский и Е. С. Фрадкин построили теорию турбулентного перемешивания для разноплотных сред, находящихся в поле силы тяжести. Основное отличие предлагаемой ниже теории от теории Бельского и Фрадкина — в осреднении характерной турбулентной скорости по области перемешивания. Этот способ эквивалентен новой теории Прандтля для перемешивания, возникающего из-за разрыва скоростей (тангенциальное перемешивание). Новый подход позволяет получить в аналитическом виде решение задачи о перемешивании двух несжимаемых жидкостей в полной постановке с учетом изменения кинетической энергии турбулентного движения во времени. В работе проведено сравнение предлагаемой теории с известной. Показано, что различие в распределении плотности получается незначительным и зависит от величины начального перепада.

1. Граница двух сред разной плотности при ускорении, направленном от менее плотной среды к более плотной, неустойчива и подвержена турбулентному перемешиванию. Бельский и Фрадкин ⁽¹⁾ построили теорию турбулентного перемешивания, введя по аналогии с гидродинамической теорией жидкости при наличии диффузии турбулентный диффузионный поток. Они рассмотрели изотермический случай, когда температура не зависит от пространственной координаты. В ⁽²⁾ в рамках той же теории дополнительно введен турбулентный тепловой поток, благодаря чему снято ограничение на изотермичность.

Суть метода состоит в выводе выражения для коэффициента турбулентной диффузии (теплопроводности)

$$D = lv, \quad (1,1)$$

где l — характерная турбулентная длина, связанная с шириной области перемешивания эмпирической постоянной α :

$$l = \alpha L, \quad (1,2)$$

а v — некоторая характерная турбулентная скорость. Для v на основании энергетических соображений можно получить уравнения ⁽¹⁾

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \rho v^2}{\partial t} + v \frac{\rho v^3}{l} = \rho l v \omega^2; \quad (1,3)$$

$$\omega^2 = g \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial r} + \frac{g}{a^2} \right), \quad (1,4)$$

где ρ — плотность смеси, $g = -\partial P / \partial r$ — ускорение, a — скорость звука, ω — частота нарастания коротковолновых возмущений, полученная при исследовании на устойчивость произвольного одномерного течения. Выражение для ω содержится в работе ⁽³⁾ в предположении изотермичности. Приводимая здесь частота получена автором совместно с Е. Г. Гамалием и Л. И. Шибаршовым в общем случае, без предположения об изотермич-

ности. В рассматриваемом ниже случае несжимаемой жидкости оба выражения для ω совпадают, так как при этом скорость звука $a=\infty$, поэтому

$$\omega^2 = g \frac{\partial \ln \rho}{\partial r}. \quad (1,4_a)$$

В энергетическом уравнении (1,3) содержится постоянная γ , значение которой, в отличие от работы (¹), мы будем считать неизвестным, как и значение α в (1,2). Обе постоянные нужно определять из опыта. Если в последнем выражении правая часть получается отрицательной, то движение устойчиво и частота ω полагается равной нулю.

Очевидно, турбулентная скорость из уравнения (1,3) получится зависящей от времени t и пространственной координаты r , тогда как длина l зависит только от времени. По аналогии с новой теорией Прандтля для тангенциального перемешивания (⁴), уравнение (1,3) можно осреднить по области перемешивания следующим образом. Положим, что турбулентная скорость v не зависит от пространственной переменной r и является только функцией времени t . Возьмем интеграл по области перемешивания L от равенства (1,3):

$$\frac{M}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \int_L \frac{\partial \rho}{\partial t} dr + v M \frac{v^3}{l} = lv \int_L \rho \omega^2 dr; \quad (*)$$

здесь через M обозначена масса перемешанного вещества,

$$M = \int_L \rho dr.$$

Если учесть уравнение для плотности (2,1), то второй член в левой части соотношения (*), очевидно, будет равен нулю. После деления на M получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} + v \frac{v^3}{l} = lv \bar{\omega}^2; \quad (1,5)$$

$$\bar{\omega}^2 = \frac{\int_L \rho \omega^2 dr}{M} \approx \bar{g} \frac{(\rho_1^0 - \rho_2^0)}{M}, \quad (1,6)$$

где $\bar{g}$ — некоторое среднее ускорение в области перемешивания, а ρ_1^0 и ρ_2^0 — значения плотности на фронте. Как будет показано ниже, в этом случае, в отличие от (¹), фронт перемешивания отсутствует, а получаемое решение экспоненциально стремится к граничным данным. Поэтому за ширину перемешивания примем, например, расстояние между точками, в которых безразмерная плотность

$$\delta = \frac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \quad (1,7)$$

принимает значения 0,1 и 0,9.

2. Рассмотрим автомодельную задачу о перемешивании двух несжимаемых жидкостей с начальной плотностью ρ_1 и ρ_2 . Как известно (¹), в этом случае наряду с (1,5) нужно проинтегрировать уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} D \frac{\partial \rho}{\partial r}. \quad (2,1)$$

Поскольку коэффициент турбулентной диффузии D зависит только от времени, то, вводя новую переменную τ :

$$d\tau = D dt, \quad (2,2)$$

получим

$$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} \Phi(\eta), \quad \eta = \frac{r}{2\tau^{1/2}}; \quad (2.3)$$

здесь $\Phi(\eta)$ — интеграл вероятности.

Решение (2,3) асимптотически при $r \rightarrow +\infty$ и $r \rightarrow -\infty$ стремится соответственно к ρ_1 и ρ_2 .

Выведем формулу для ширины L . Подставим (2,3) в (1,7) и получим

$$\delta = 1/2(1 + \Phi). \quad (2.4)$$

При $\delta = 0,1$ и $\delta = 0,9$ имеем $\Phi(\eta_0) = -\Phi(-\eta_0) = 0,8$; $\eta_0 = 0,906$.

Область перемешивания точкой $\eta = 0$ разделяется на две одинаковые части и равна

$$L = 4\eta_0\tau^{1/2}. \quad (2.5)$$

Разность плотностей на фронте перемешивания $\rho_1^0 - \rho_2^0$ выразится через начальные плотности:

$$\rho_1^0 - \rho_2^0 = 0,8(\rho_1 - \rho_2). \quad (2.6)$$

Уравнение для турбулентной скорости (1,5) с учетом (1,6), (2,2) и (2,6) примет вид

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2}{d\tau} + \frac{vv^2}{\alpha^2 L^2} = 1,6 \frac{\bar{g}}{L} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}; \quad (2.7)$$

здесь использовано равенство

$$M = \frac{\rho_1^0 + \rho_2^0}{2} L.$$

Уравнение (2,7) интегрируется:

$$v^2 = \frac{0,8(\rho_1 - \rho_2)}{\eta_0(\rho_1 + \rho_2)} \tau^{-1/2\beta} \int_0^\tau \bar{g} \tau^{(1-\beta)/2\beta} d\tau, \quad \beta = 4 \frac{\alpha^2}{v} \eta_2^0. \quad (2.8)$$

Пусть ускорение постоянно в течение некоторого времени t_0 : $\bar{g} = g_0$ и мгновенно выключается при $t > t_0$: $\bar{g} = 0$. В этом случае

$$v^2 = \begin{cases} \frac{\beta g_0 \cdot 1,6(\rho_1 - \rho_2)}{\eta_0(1+\beta)(\rho_1 + \rho_2)} \tau^{1/2}, & t < t_0, \\ \frac{\beta g_0 \cdot 1,6(\rho_1 - \rho_2)}{\eta_0(1+\beta)(\rho_1 + \rho_2)} \tau_0^{1/2} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{-1/2\beta}, & t \geq t_0; \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\tau^{1/2} = \begin{cases} \frac{\alpha^2 \beta \eta_0}{1+\beta} g_0 \frac{1,6(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 + \rho_2} t^2, & t < t_0, \\ \frac{\alpha^2 \beta \eta_0}{1+\beta} g_0 \frac{1,6(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 + \rho_2} t_0^2 \left(\frac{2}{n} \frac{t-t_0}{t_0} + 1 \right)^n, & t \geq t_0; \end{cases} \quad (2.10)$$

$$n = 2\beta / (1 + 2\beta).$$

Следовательно, учет в уравнении баланса энергии (1,5) изменения кинетической энергии турбулентного движения приводит к тому, что при постоянном ускорении ширина области перемешивания, как и ранее в (1), развивается со временем по квадратичному закону. После выключения ускорения перемешивание продолжается по инерции со степенью n :

$$L = \begin{cases} \frac{\beta^2}{1+\beta} g_0 \frac{1,6(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 + \rho_2} t^2, & t < t_0, \\ \frac{\beta^2}{1+\beta} g_0 \frac{1,6(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 + \rho_2} t_0^2 \left(\frac{2}{n} \frac{t-t_0}{t_0} + 1 \right)^n, & t \geq t_0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Степень затухания ширины области, охваченной турбулентностью, выражается через эмпирические постоянные α и ν :

$$n = \frac{8\alpha^2\eta_0^2}{\nu + 8\alpha^2\eta_0^2}. \quad (2,12)$$

3. Предлагаемая теория дает другое распределение плотности. Различие продемонстрировано на рис. 1, где изображен безразмерный профиль плотности δ . Переменная η в профилях δ из ⁽¹⁾ выбрана таким образом, чтобы значение δ при $\eta/\eta_{0,1} = -1$ было одним и тем же и равнялось 0,1.

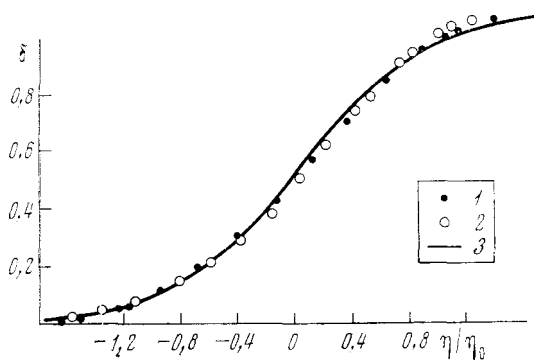


Рис. 1

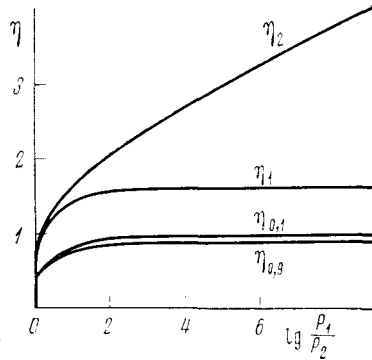


Рис. 2

Рис. 1. Безразмерный профиль плотности δ . 1, 2 — теория ⁽¹⁾, 3 — предлагаемая теория. 1 — $\rho_1/\rho_2=2$; 2 — $\rho_1/\rho_2=20$. Функция $\delta=0$ при $\eta/\eta_0=-2,06$ (1); $-2,53$ (2); $-\infty$ (3) и $\delta=1$ при $\eta/\eta_0=1,86$ (1); $1,70$ (2); $+\infty$ (3)

Рис. 2. $\eta=\eta_1$ и $\eta=-\eta_2$ — соответственно правая и левая границы области перемешивания из ⁽¹⁾, $\eta=\eta_{0,1}$, $\eta_{0,2}$ — точки, в которых $\delta(\eta_{0,1})=0,1$ и $\delta(\eta_{0,2})=0,9$

Анализ решений из ⁽¹⁾ показывает, что при перепаде плотностей $\rho_1/\rho_2 \rightarrow \infty$ ширина перемешанной зоны неограниченно растет, но так, что вправо от точки $\eta=0$ она конечна и $\eta_1 \rightarrow 1,60$, тогда как влево $\eta_2 \rightarrow \infty$ (см. рис. 2). Безразмерная плотность для $\rho_1/\rho_2=100$ графически совпадает с плотностью для $\rho_1/\rho_2=20$ на рис. 1.

Следовательно, новая теория дает профиль безразмерной плотности, хорошо совпадающий с профилем из ⁽¹⁾ в основной области перемешивания. Отличие получается на концах этой области: разные законы прилегания плотности к краевым условиям.

В заключение приношу глубокую благодарность Л. И. Шибаршову, постоянные дискуссии с которым были для меня весьма полезны. Я также признателен В. Г. Яковлеву, выполнившему численное интегрирование уравнения из ⁽¹⁾ для построения рис. 1 и 2.

Поступило
13 III 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. З. Беленький, Е. С. Фрадкин, Тр. ФИАН им. П. А. Лебедева, т. 29, стр. 207 (1965). ² В. Е. Неуважеев, В. Г. Яковлев, Тр. Всесоюз. школы по численным методам в физике плазмы, Звенигород, 1974. ³ Е. С. Фрадкин, Тр. ФИАН им. П. А. Лебедева, т. 29, 250 (1965). ⁴ Г. Шлихтинг, Теория пограничного слоя, ИЛ, М., 1956.