

УДК 532.7

ГИДРОМЕХАНИКА

В. А. СУЧКОВ

О ДВОЙНЫХ ВОЛНАХ ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЙ С ПЕРЕМЕННОЙ ЭНТРОПИЕЙ

(Представлено академиком Н. Н. Яненко 14 III 1975)

1. Рассмотрим двойные волны плоских течений политропного газа с переменной энтропией. Предположим, что компоненты вектора скорости u_1 , u_2 функционально независимы, т. е.

$$J = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \neq 0. \quad (1,1)$$

Положим

$$\varphi = \varphi(u_1, u_2), \quad \psi = \psi(u_1, u_2), \quad (1,2)$$

где φ — энтальпия, ψ — функция энтропии,

$$\varphi = c^2/(\gamma-1), \quad \psi = \frac{1}{\gamma} \ln(p\rho^{-\gamma}). \quad (1,3)$$

Из соотношений (1,2) следует, что функции u_1 , u_2 , φ , ψ имеют общие линии уровня

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i. \quad (1,4)$$

Используя (1,2), (1,4), уравнения движения приведем к виду ⁽¹⁾

$$\frac{du_i}{dt} + a_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0; \quad (1,5)$$

$$\varphi_i \frac{du_i}{dt} + c^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0; \quad (1,6)$$

$$\psi_i \frac{du_i}{dt} = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad (1,7)$$

где

$$\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \quad \psi_i = \frac{\partial \psi}{\partial u_i}$$

$$\frac{d}{dt} = U_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad U_j = u_j - v_j, \quad a_j = \varphi_j - \varphi \psi_j. \quad (1,8)$$

Умножим (1,5) на U_i ; используя (1,7), получим

$$(U_i + \varphi_i) \frac{du_i}{dt} = 0. \quad (1,9)$$

Из (1,7), (1,9) будем иметь

$$(U_1 + \varphi_1) \psi_2 = (U_2 + \varphi_2) \psi_1; \quad (1,10_1)$$

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{du_2}{dt} = 0 \quad (1,10_2)$$

Второй случай приводит к тому, что давление постоянно, а линиями уровня являются прямолинейные траектории частиц.

2. Предположим, что линии уровня (1,4) — прямые

$$x_i = v_i(u_1, u_2)t + w_i(u_1, u_2). \quad (2,1)$$

Соотношение (1,10) можно записать в виде

$$U_i + \varphi_i = \lambda \psi_i, \quad (2,2)$$

где $\lambda(u_1, u_2)$ — пока произвольная функция.

Отсюда определяются функции v_i :

$$v_i = u_i + \varphi_i - \lambda \psi_i. \quad (2,3)$$

Подставим (1,8), (2,3) в (1,5) — (1,7), получим три уравнения:

$$(\lambda - \varphi) \psi_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + (-1)^{j+1} b_{3-j} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0; \quad (2,4)$$

$$a_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, 2; \quad (2,5)$$

$$a_{ij} = \varphi_i \varphi_j - c^2 \delta_{ij} - \lambda \varphi_i \psi_j, \quad b_j = \lambda \psi_j - \varphi_j. \quad (2,6)$$

Уравнение (1,7) есть следствие уравнений (2,4). При выводе системы (2,4), (2,5) предполагали, что $\lambda \neq \varphi$, иначе течение потенциальное, энтропия постоянна.

Сделаем преобразование годографа; вместо (2,4), (2,5) получим уравнения

$$\begin{aligned} (-1)^j (\lambda - \varphi) \psi_{3-j} f_{ij} + b_i (f_{21} - f_{12}) &= 0, \\ (-1)^{i+j} a_{3-j, 3-i} f_{ij} &= 0, \end{aligned} \quad (2,7)$$

где

$$f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}, \quad f_i = x_i, v_i, w_i.$$

Уравнения для v_i и w_i получаются из уравнений для $f_i = x_i$, если подставить туда производные x_{ij} , вычисленные из (2,1) при фиксированном t , и приравнять нулю члены при одинаковых степенях t .

Система (2,7) для функций f_i переопределенная, условия ее совместности можно получить обычным способом (они совпадают для функций x_i, v_i, w_i).

Уравнения (2,7) для функций $f_i = v_i$ представляют собой систему трех дифференциальных уравнений для λ, φ, ψ . Если каким-то образом определены функции λ, φ, ψ , удовлетворяющие уравнениям (2,7), то уравнения для $f_i = w_i$ также совместны и определяют функции $w_i(u_1, u_2)$. Подставив $v_i(u_1, u_2), w_i(u_1, u_2)$ в соотношения (2,1), получим u_1, u_2 как неявные функции x_1, x_2, t .

3. Выпишем систему уравнений двойных волн:

$$(-1)^j (\lambda - \varphi) \psi_{3-j} v_{ij} + b_i (v_{21} - v_{12}) = 0; \quad (3,1)$$

$$(-1)^{i+j} a_{3-j, 3-i} v_{ij} = 0, \quad v_{ij} = \varphi_{ij} + \delta_{ij} - (\lambda \psi_i)_j; \quad (3,2)$$

$$(-1)^j (\lambda - \varphi) \psi_{3-j} w_{ij} + b_i (w_{21} - w_{12}) = 0, \quad (3,3)$$

$$(-1)^{i+j} a_{3-j, 3-i} w_{ij} = 0.$$

Если энтропия постоянна, то уравнения (3,1) — (3,3) совпадают с соответствующими уравнениями пзэнтропических двойных волн работы (2). Результаты работы (1) о том, что к классу двойных волн принадлежат стационарные и конические течения, переносятся на класс двойных волн

с переменной энтропией. Для стационарных течений $v_i=v_{i0}$ и

$$\varphi + (u_1^2 + u_2^2)/2 = T(\psi), \quad \lambda = T'(\psi), \quad (3,4)$$

где $T(\psi)$ — произвольная функция энтропии.

Уравнения (3,1), (3,2) при этом удовлетворяются тождественно, а (3,3) совпадают с уравнениями стационарных течений в плоскости годографа скорости.

Для конических течений $w_i=w_{i0}-v_i$ и уравнения (3,3) суть следствия (3,1), (3,2).

Из уравнений (3,1) можно найти функцию λ :

$$\lambda = (-1)^{i+j} a_{3-i} \psi_{3-j} (\varphi_{ij} + \delta_{ij}) / (-1)^{i+j} a_{3-i} \psi_{3-j} \psi_{ij}; \quad (3,5)$$

знаменатель в (3,5) предполагается отличным от нуля. Если исключить λ с помощью (3,5) из уравнений (2,1), (3,1), (3,2) и взять в качестве иско-
мых функций плотность $\rho(u_1, u_2)$ и энтропию $S(u_1, u_2)$, то получим систе-
му уравнений работы ⁽³⁾ для конических течений. Результаты этой рабо-
ты могут быть обобщены на случай двойных волн с переменной энтро-
пией. Например, следуя ⁽³⁾, для системы (3,1) — (3,3) можно рассмотреть
решения вида

$$\begin{aligned} \lambda &= u_1^2 \Lambda(z), \quad \varphi = u_1^2 \Phi(z), \quad \psi = \psi_0 \ln u_1 + \Psi(z); \\ w_i &= \sum_{\alpha} u_1^{\alpha} W_{i\alpha}(z), \quad z = u_2/u_1. \end{aligned} \quad (3,6)$$

Для функций Λ , Φ , Ψ , $W_{i\alpha}$ получим систему обыкновенных дифферен-
циальных уравнений.

Поступило
22 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Сучков, Тр. Матем. инст. АН СССР им. В. А. Стеклова, т. 74, ч. 1 (1966).
² Ю. Я. Погодин, В. А. Сучков, Н. Н. Яценко, ДАН, т. 119, № 3 (1958). ³ А. Ф. Си-
доров, ДАН, т. 173, № 1 (1967).