

УДК 513.836

МАТЕМАТИКА

В. А. СМЕРНОВ

ГОМОЛОГИИ СКРЕЩЕННЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 31 XII 1974)

Пусть Λ — коммутативное кольцо с единицей, K — DGA-коалгебра с ко-умножением $\nabla: K \rightarrow K \otimes K$, A — DGA-алгебра с умножением $\pi: A \otimes A \rightarrow A$, M — DGA- A -модуль с действием $\mu: A \otimes M \rightarrow M$, L — DGA- K -комодуль с кодействием $\tau: L \rightarrow L \otimes K$, N — DGA-модуль (см. ^(2, 3)).

Тривиальными изменениями теоремы 1' работы ⁽⁵⁾ можно получить следующее утверждение.

Теорема 1. Если модули L и M свободны над Λ и $L \otimes_{\Phi} M$ — скрещенное тензорное произведение, то существует скрещивающая коцепь $\varphi^*: K \rightarrow M^*$, для которой имеет место цепная эквивалентность

$$\psi: L \otimes_{\Phi} M \rightarrow L \otimes_{\Phi} R_*(M),$$

где $R_*(M)$ — свободная резольвента DGA-модуля и $H_*(M)$

$$M^* = \text{Hom}(R_*(M); R_*(M)).$$

В настоящей работе мы покажем, что в случае, если для скрещивающей коцепи $\varphi = \{\varphi_n\}$, $\varphi_1 = 0$, то в $R_*(L) \otimes R_*(M)$ можно определить дифференциал, превращающий этот модуль в комплекс, цепно эквивалентный $L \otimes_{\Phi} M$.

Рассмотрим DG-модуль $\text{Hom}(N; N \otimes A)$ и определим DG-отображения

$$\begin{aligned} \cup: \text{Hom}(N; N \otimes A) \otimes \text{Hom}(N; N \otimes A) &\rightarrow \text{Hom}(N; N \otimes A), \\ \cap: \text{Hom}(N; N \otimes A) \otimes N \otimes M &\rightarrow N \otimes M, \end{aligned}$$

положив для $\varphi, \psi \in \text{Hom}(N; N \otimes A)$, $x \in N \otimes M$

$$\varphi \cup \psi = (1 \otimes \pi)(\varphi \otimes 1)\psi, \quad \varphi \cap x = (1 \otimes \mu)(\varphi \otimes 1)(x).$$

Обозначим $\varphi \cap: N \otimes M \rightarrow N \otimes M$ отображение, индуцированное $\cap$ -отображением.

Легко видеть, что для отображений $\cup$ и $\cap$ выполнены следующие свойства:

- 1) $d(\varphi \cup \psi) = (d\varphi) \cup \psi + (-1)^p \varphi \cup (d\psi)$, $p = \dim \varphi$,
- 2) $d(\varphi \cap x) = (d\varphi) \cap x + (-1)^p \varphi \cap (dx)$, $p = \dim \varphi$,
- 3) $\varphi \cap (\psi \cap x) = (\varphi \cup \psi) \cap x$.

Определение. $\varphi: N \rightarrow N \otimes A$ будем называть скрещивающей коцепью, если выполнены следующие условия:

- 4) $\dim \varphi = -1$;
- 5) $a \circ \varphi = 0$, где $a: N \otimes A \rightarrow \Lambda$ — аугументация;
- 6) $d\varphi + \varphi \cup \varphi = 0$.

Пусть $\varphi: N \rightarrow N \otimes A$ — скрещивающая коцепь; определим в $N \otimes M$ дифференциал ∂_{φ} , положив $\partial_{\varphi}(x) = dx + \varphi \cap x$; тогда легко видеть, что $\partial_{\varphi} \circ \partial_{\varphi} = 0$. Полученный DGA-модуль обозначим $N \otimes_{\Phi} M$.

Пусть $\varphi: N \rightarrow N \otimes A$, $\dim \varphi = p$. Обозначим

$$\varphi_n: N \rightarrow N \otimes A_{p+n}$$

композицию

$$N \xrightarrow{\varphi} N \otimes A \xrightarrow{j} N \otimes A_{n+p}$$

где $j: N \otimes A \rightarrow N \otimes A_{n+p}$ — проекция, тогда

$$\varphi = \{\varphi_n\}, \quad (\varphi \cup \psi)_n = \sum_i \varphi_i \cup \psi_{n-i}$$

и условия для скрещаивающей коцепи можно переписать в следующем виде:

$$4') \dim \varphi = -1,$$

$$5') a \circ \varphi_1 = 0, \varphi_0 = 0,$$

$$6') \text{ Для любого } n \geq 2 \text{ выполнено равенство}$$

$$(1 \otimes \partial) \varphi_n + (\partial \otimes 1) \varphi_{n-1} + \varphi_{n-1} \partial + \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i \cup \varphi_{n-i} = 0.$$

Любая скрещаивающая коцепь $\varphi': K \rightarrow A$, $\varphi' = \{\varphi'_n\}$ определяет скрещаивающую коцепь $\varphi: L \rightarrow L \otimes A$ в нашем смысле по формуле $\varphi = (1 \otimes \varphi') \tau$, $\varphi_n = (1 \otimes \varphi'_n) \tau$ и $L \otimes_{\varphi} M = L \otimes_{\varphi'} M$.

Пусть N, M — свободные DGA-модули.

Рассмотрим свободную резольвенту $R_*(N)$ DGA-модуля $H_*(N)$. Существуют DGA-отображения

$$\eta: N \rightarrow R_*(N), \quad \xi: R_*(N) \rightarrow N$$

и гомоморфизмы

$$D: N \rightarrow N, \quad D': R_*(N) \rightarrow R_*(N)$$

такие, что

$$\partial D + D \partial = \xi \eta - \text{id}, \quad \partial D' + D' \partial = \eta \xi - \text{id}.$$

Пусть $\varphi: N \rightarrow N \otimes A$ — скрещаивающая коцепь такая, что $\varphi_1 = 0$.

Определим $w: N \rightarrow N \otimes A$, $\tilde{w}: N \rightarrow N \otimes A$, положив

$$w = \sum_n w_n, \quad \tilde{w} = \sum_n \tilde{w}_n,$$

$$\tilde{w}_n = (D \otimes 1) \varphi_{n+1}, \quad w_0(x) = x \otimes 1,$$

$$w_1 = \tilde{w}_1, \quad w_n = \sum_{i=0}^{n-1} w_i \cup \tilde{w}_{n-i},$$

т. е. $w = w \cup \tilde{w}$. Определим далее $\tilde{\varphi}: N \rightarrow N \otimes A$, положив $\hat{\varphi} = \varphi \cup w$.

Рассмотрим $\varphi^* = (\xi \eta \otimes 1) \varphi$ и $\tilde{\varphi}^* = \varphi^* \cup w = (\xi \eta \otimes 1) \tilde{\varphi}$.

Непосредственные вычисления показывают, что справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. $d w = w \cup \tilde{\varphi}^* - \tilde{\varphi}$.

Лемма 2. $d \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi} \cup \tilde{\varphi}^* = 0$.

Определим $\varphi': R_*(N) \rightarrow R_*(N) \otimes A$ и $\psi: R_*(N) \otimes_{\varphi} M \rightarrow N \otimes_{\varphi} M$, положив $\varphi' = (\eta \otimes 1) \tilde{\varphi} \xi$ и $\psi = (1 \otimes \mu)(w \otimes 1)(\xi \otimes 1)$; тогда из леммы 2 следует, что φ' — скрещаивающая коцепь и из леммы 1 следует, что ψ — DGA-отображение.

Пусть G^q и G'^q — фильтрации произведений $N \otimes_{\varphi} M$ и $R_*(N) \otimes_{\varphi} M$ соответственно.

$$G^q = \sum_{i \leq q} N_i \otimes M, \quad G'^q = \sum_{i \leq q} R_i(N) \otimes M.$$

Ясно, что $\psi(x \otimes m) = \xi(x) \otimes m \bmod G^p$, где $x \in R_{p+1}(N)$, $m \in M$.

Рассмотрим спектральные последовательности $E_{p,q}^r$ и $E_{p,q}^{r'}$ DGA-модулей $N \otimes_{\varphi} M$ и $R_*(N) \otimes_{\varphi} M$ относительно этих фильтраций; тогда ψ индуцирует изоморфизм

$$\psi_*: E_{p,q}^{r'2} = H_p(R_*(N); H_q(M)) \rightarrow E_{p,q}^2 = H_p(N; H_q(M))$$

и, следовательно, изоморфизм

$$\psi_*: H_*(R_*(N) \otimes_{\varphi} M) \rightarrow H_*(N \otimes_{\varphi} M),$$

а так как $N \otimes_{\varphi} M$ и $R_*(N) \otimes_{\varphi} M$ свободны, то ψ — цепная эквивалентность.

Таким образом, получается

Теорема 2. Если модули N, M свободны над Λ , $\varphi: N \rightarrow N \otimes A$ — скрещивающая коцепь такая, что $\varphi_1 = 0$, то существует скрещивающая коцепь $\varphi': R_*(N) \rightarrow R_*(N) \otimes A$, для которой имеет место цепная эквивалентность

$$\psi: R_*(N) \otimes_{\varphi} M \rightarrow N \otimes_{\varphi} M.$$

Следствие 1. Если модули L, M свободны над Λ и $\varphi: K \rightarrow A$ — скрещивающая коцепь такая, что $\varphi_1 = 0$, то на $R_*(L) \otimes R_*(M)$ можно определить дифференциал, превращающий этот модуль в комплекс, цепно эквивалентный $L \otimes_{\varphi} M$.

Из этого следствия и теории скрещенных тензорных произведений Э. Брауна (см. (1)) получаем

Следствие 2. Если для слабо транзитивного расслоенного пространства (X, B, p, λ) база B односвязна, то на $R_*(B) \otimes R_*(F)$ можно определить дифференциал, превращающий этот модуль в комплекс, цепно эквивалентный $C_*(X; \Lambda)$, где

$$R_*(B) = R_*(C_*(B; \Lambda)), \quad R_*(F) = R_*(C_*(F; \Lambda)).$$

Следствие 3. В условиях следствия 2 на модуле $\text{Hom}(R_*(B); R_*(F))$ можно определить дифференциал, превращающий этот модуль в комплекс, цепно эквивалентный $C^*(X; \Lambda)$, где $R^*(F)$ — свободная резольвента, DGA-модуля $H^*(F; \Lambda)$.

Пусть DGA- A -модуль M является n -мерной гомологической сферой, $n > 1$, и $\varphi: K \rightarrow A$ — скрещивающая коцепь. Определим коцикл $w \in C^{n+1}(K; \Lambda)$, положив $w(k) = \varphi^*(k)$ (1), где

$$\varphi^*: K \rightarrow \text{Hom}(H_*(M); H_*(M))$$

скрещивающая коцепь, участвующая в теореме 1, и $1 \in H_0(M) = \Lambda$. Коцикл w определяет отображение $f_w: L \rightarrow L'$ по формуле

$$f_w(x) = (1 \otimes w) \tau(x),$$

где L — DGA- K -комодуль, $L' = \sum_m L_m'$, $L_m' = L_{m-n}$, размерность w считается равной -1 . Легко видеть, что $\partial(f_w) = 0$ и из теоремы 1 получаем

Следствие 4. Если DGA- A -модуль M является n -мерной гомологической сферой, то в предположениях теоремы 1 имеет место цепная эквивалентность

$$\psi: L \otimes_{\varphi} M \rightarrow L' +_{f_w} L,$$

где $L' +_{f_w} L$ — скрученная сумма относительно отображения $f_w: L \rightarrow L'$ (см. (4)).

Аналогично, если DGA- K -комодуль L является n -мерной гомологической сферой, то скрещивающая коцепь $\varphi: K \rightarrow A$ определяет цикл $a \in A_{n-1}$, $a = \varphi^*(1)$, где

$$\varphi^*: H_*(L) \rightarrow H_*(L) \otimes A$$

скрещивающая коцепь, участвующая в теореме 2, и $1 \in H_n(L) = \Lambda$.

Определим $f_a: M' \rightarrow M$, положив $f_a(x) = \mu(a \otimes x)$, где

$$M' = \sum_m M_m', \quad M_m' = M_{m-n}.$$

Из теоремы 2 получаем

Следствие 5. Если DGA- K -комодуль L является n -мерной гомологической сферой, то в предположениях теоремы 2 имеет место цепная эквивалентность

$$\psi: L \otimes_{\Phi} M \rightarrow M_{fa} + M'.$$

В заключение автор выражает благодарность проф. М. Ф. Бокштейну за постоянную помощь во время работы.

Московский государственный
педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
24 XI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Э. Браун, Скрещенные тензорные произведения, Сборн. переводов, Математика, т. 6, № 1, 33 (1962). ² S. Eilenberg, J. C. Moore, Comm. Math. Helv., v. 40, 199 (1960). ³ W. K. A. M. Guichenot, Ill. J. Math., v. 4, 292 (1960). ⁴ W. Shih, Homologie des espaces fibrés. Inst. hautes et sci. Publ. math. Fr., № 13, 88 (1962). ⁵ В. А. Смирнов, ДАН, т. 222, № 2 (1975).