

Р. С. СИНГАТУЛЛИН

ИНВАРИАНТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЕМ ПУТЕЙ ПРОБНЫХ ЧАСТИЦ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 31 III 1975)

Можно показать, что для того чтобы все времениподобные геодезические линии

$$\frac{\delta \left(\frac{dx^i}{ds} \right)}{ds} = 0 \quad (1)$$

пространства $V_4(- - - +)$ при одинаковых начальных условиях совпали с времениподобными мировыми линиями

$$\frac{\bar{\delta} \left(\frac{dx^i}{d\bar{s}} \right)}{d\bar{s}} = 2 \left(\varphi_k \frac{dx^k}{d\bar{s}} \right) \bar{F}^i{}_{,j} \frac{dx^j}{d\bar{s}} \quad (2)$$

пространства $\bar{V}_4(- - - +)$, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\bar{g}_{ij} u^i u^j > 0$$

и

$$\Omega_{jk}^i = \varphi_j \bar{F}_{,k}^i + \varphi_k \bar{F}_{,j}^i + \psi_j \delta_k^i + \psi_k \delta_j^i, \quad (3)$$

здесь $\Omega_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{jk}^i$, $F_{ik} = -F_{ki}$ — бивекторное поле, $\bar{u}^i = dx^i/d\bar{s}$, φ_k и ψ_k — векторные поля.

Если уравнения (2) допускают линейный интеграл $\varphi_k \bar{u}^k = \text{const}$, то они описывают траектории пробной частицы под действием силы типа Лоренца, физически хорошо интерпретируемой. Для этого необходимо и достаточно, чтобы φ_i удовлетворяли уравнениям

$$\varphi_{i,k} + \varphi_{k,i} + 2\varphi_i \varphi_l \bar{F}_{,k}^l + 2\varphi_k \varphi_l \bar{F}_{,i}^l = 0, \quad (4a)$$

где запятая означает ковариантную производную в $\bar{V}_4$, т. е. в пространстве-модели.

Представляет интерес отыскание общего решения систем (3) и (4a), характеризующих отображение путей пробных частиц в ОТО. В данной работе рассмотрим эту систему при дополнительных условиях

$$\psi_i = \frac{\partial \psi}{\partial x^i} = \psi_{,i}, \quad \bar{g}^{lm} g_{im} F_{lk} + \bar{g}^{lm} g_{km} F_{li} = 0. \quad (5)$$

Пространства $\bar{V}_4$ и V_4 , определяемые отображением (3) с вектором ψ_i и бивектором F_{jk} при условиях (5), назовем $\bar{H}$ -пространствами.

В силу градиентности вектора ψ_i из (3) вытекает градиентность вектора

$$\varphi_l \bar{F}_{,i}^l = \frac{\partial V}{\partial x^i} = V_{,i}.$$

Учитывая эту формулу, систему (4_a) можно записать в виде уравнений Киллинга

$$\xi_{i,k} + \xi_{k,i} = 0, \quad (4_6)$$

где $\xi^K = \xi_{ij} \bar{g}^{jk} = \bar{\varphi}^k e^{2V}$ — вектор Киллинга. При $\psi_k = \psi_{,k}$ эти уравнения показывают, что только в пространствах-моделях, допускающих группу движений с вектором Киллинга $\xi^k = \bar{\varphi}^k e^{2V}$, возможна конструкция силы типа Лоренца, возникающая при отображении геодезических.

В уравнениях (4₆) заменим $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ выражениями, определяемыми из (3), и получим систему

$$(\sigma \xi_i)_{;k} + (\sigma \xi_k)_{;i} = 0, \quad (4)$$

где $\sigma = e^{-2\psi - 2V}$ — скалярный множитель, точка с запятой означает ковариантную производную в V_4 . Тогда вектор

$$\sigma \xi_i g^{jk} = \sigma \xi^i \bar{g}_{ij} g^{jk} = \sigma \xi^i u_i^K = \eta^K \quad (5)$$

служит вектором Киллинга в пространстве-оригинале V_4 . Обратно, из системы (4) с необходимостью вытекает система (4₆).

Теорема 1. Если $\bar{V}_4$ и V_4 образуют Π -пространства, то для того, чтобы временноподобные геодезические (1) отобразились временноподобными мировыми линиями $\bar{\Gamma}_i$ под действием силы Лоренца, необходимым и достаточным условием является наличие группы движений в V_4 с вектором Киллинга η^K , а также справедливость неравенства $\bar{g}_{ij} u^i u^K > 0$.

Введем в рассмотрение тензоры

$$g_{ij}' = e^{2\psi} \bar{g}^{mn} g_{mi} g_{nj}, \quad g_{ij}'' = e^{2\psi} g_{ij}, \quad (6)$$

использованные в работе (1). С помощью системы уравнений (3) вычислим ковариантную производную тензора g_{ij}' в пространстве V_4 и получим

$$g_{ij;k}' = \lambda_j g_{ki} + \lambda_i g_{kj} + \lambda_j \bar{F}^m_{\cdot k} g_{mi} + \lambda_i \bar{F}^n_{\cdot k} g_{nj},$$

где

$$\lambda_j = -e^{2\psi} g_{nj} \bar{\Psi}^n, \quad \lambda_j^* = -e^{2\psi} g_{nj} \bar{\Phi}^n.$$

Используя эту систему, а также соотношение между символами Кристоффеля конформных пространств V_4'' и V_4 (2), будем иметь в новом пространстве уравнения

$$g_{ij||k}' = \lambda_j \bar{F}^m_{\cdot k} g_{mi} + \lambda_i \bar{F}^m_{\cdot k} g_{mj} - 2g_{ij}' \psi_k - g_{kj}' \psi_i - g_{ki}' \psi_j.$$

Учитывая условия (5), сможем доказать эквивалентность этой системы системе

$$\Gamma^{''i}_{\cdot jk} - \Gamma^{''i}_{\cdot k} = \psi_k \delta_j^i + \psi_j \delta_k^i + \lambda_j'' F^{''i}_{\cdot k} + \lambda_k'' F^{''i}_{\cdot j}, \quad (7)$$

где

$$\lambda_j'' = g_{nj}'' \Phi^n, \quad F^{''i}_{\cdot k} = g^{''si} F_{sk}.$$

Сравнение системы уравнений (7) с системой (3) показывает, что они полностью совпадают по форме, показывает общность вектора ψ_k и бивектора F_{jk} , вектор λ_j'' играет роль вектора φ_j из (3). Непосредственным вычислением убедимся, что

$$\lambda_j'' F^{''i}_{\cdot k} = \varphi_j \bar{F}^i_{\cdot k} = \frac{\partial V}{\partial x^k}.$$

Поэтому, выполняя свертку по индексам i, j , из уравнений (7) получим градиентность вектора ψ_k . Более того, имеют место соотношения

$$g^{''ij} g_{jk}' = \bar{g}^{ij} g_{jk},$$

и, следовательно, в пространствах V_4'' , V_4' справедливы формулы типа (5).

Теорема 2. Если $\bar{V}_4$ и V_4 образуют Π -пространства, то пространства V_4'' и V_4' , полученные из них инвариантным преобразованием (6), с необходимостью принадлежат к Π -пространствам с тем же векторным полем ψ_i и бивекторным полем F_{ik} .

Теорема 2 дает способ получения новых решений уравнений (3) из точных решений, удовлетворяющих условиям (5). Легко показать, что применение преобразований (6) к V_4' и V_4'' возвращает нас к исходным $\bar{V}_4$ и V_4 . Записывая уравнения (4) в виде

$$\varphi_{ijk} + \varphi_{kji} = 2\theta g_{ik}'',$$

где $\theta = g'^{im} \varphi_i \psi_m$ — скаляр, утверждаем, что φ_i — конформно-киллингов вектор в пространстве V_4'' . Только при $\theta=0$ это пространство допускает лоренцову гравитационную силу.

Приведем пример. Одним из решений системы (3), (5) является следующее:

$$ds^2 = \frac{q^2}{1+kr^2} (-dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + dx^{42}) = g_{ij} dx^i dx^j,$$

$$d\bar{s}^2 = q^2 [-(1+kr^2) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + (1+kr^2) dx^{42}],$$

$$2\psi = 2V + c_0 = \ln[q^{-2}(1+kr^2)], \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0, \quad \varphi_4 = aq^2 = \text{const},$$

$-F_{14} = F_{41} = kr/a$, остальные F_{ik} равны 0, c_0 , q , a , k — постоянные. Применяя преобразование (6) к этим метрикам, по теореме (2) получим новое решение:

$$ds'^2 = (1+kr^2)^{-1} [-(1+kr^2)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + (1+kr^2)^{-1} dx^{42}], \quad (8)$$

$$ds''^2 = -dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + dx^{42},$$

$$\lambda_1'' = \lambda_2'' = \lambda_3'' = 0, \quad \lambda_4'' = \frac{a}{1+kr^2},$$

ψ и F_{ik} имеют указанные значения.

Отметим, что рассмотренные пары пространств удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда времениподобные геодезические пространства (8), согласно ОТО описывающие траектории пробного тела в соответствующем поле тяготения, с точки зрения плоского пространства-времени являются мировыми линиями тела, движущегося в центральном силовом поле $F_{41} = -kr/a$. Для этого примера кривизна пространства (8) полностью отображается бивекторным полем F_{ij} и векторным полем λ_i'' . Случай полного отображения кривизны всегда представляет физический интерес, так как дает возможность в терминах бивекторного поля F_{ij} сконструировать выражение плотности энергии-импульса поля и исследовать движение тел в рамках пространства ОТО. Смысл преобразования (6) заключается в одновременном изменении кривизны двух Π -пространств, сохраняя при этом значения компонент кососимметрического тензора F_{ij} .

Башкирский государственный педагогический институт
Уфа

Поступило
14 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. С. Синюков, ДАН, т. 137, № 6, 1312 (1961). ² Л. П. Эйзенхарт, Риманова геометрия, ИЛ, 1948.