

А. М. СТЕПИН

СДВИГИ БЕРНУЛЛИ НА ГРУППАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 I 1975)

Потребность в изучении динамических систем с неклассическим временем возникает как в самой эргодической теории, так и в приложениях ее к статистической физике. В заметке рассматриваются сдвиги Бернулли на счетных дискретных группах. Доказано свойство равномерности энтропии для сдвигов Бернулли на счетных локально-конечных группах. Этот факт вместе с модификацией конструкции Орнштейна приводит к доказательству изоморфизма сдвигов Бернулли с равной энтропией для широкого класса счетных дискретных групп. Далее, всякое действие с положительной энтропией счетной периодической подгруппы окружности имеет фактор-действие Бернулли с той же энтропией. Этот результат применяется для вычисления энтропии убывающей последовательности разбиений.

1. Пусть G — счетная дискретная группа, (Y, ν) — пространство Лебега (полное сепарабельное пространство с нормированной мерой). Положим

$$(X, \mu) = \prod_{g \in G} (Y, \nu).$$

Точками пространства X являются функции (конфигурации) $x(g)$ на G со значениями в Y . Элементу $g \in G$ сопоставим преобразование

$$T_g: x(g') \rightarrow x(g'g), \quad g' \in G.$$

Мера μ инвариантна относительно преобразований $T_g, g \in G$. Построенное действие $T: g \rightarrow T_g$ группы G в пространстве (X, μ) называется бернуллиевским действием, а пространство (Y, ν) — пространством состояний действия T . Энтропия пространства (Y, ν) называется энтропией бернуллиевского действия T и обозначается $h(T)$.

Теорема 1. Пусть G — счетная группа, имеющая элемент бесконечного порядка, T и T' — бернуллиевские действия группы G . Если $h(T) = h(T')$, то действия T и T' изоморфны.

Наметим доказательство теоремы в частном случае, когда пространства состояний (Y, ν) и (Y', ν') действий T и T' конечны или счетны. Рассмотрим отображение $\pi: X \rightarrow Y$ ($\pi': X' \rightarrow Y'$), сопоставляющее конфигурации x значение $x(e)$ в единице группы G . Обозначим ξ (ξ') прообраз разбиения пространства Y на точки при отображении π (соответственно π'). Разбиение ξ является образующим для действия T , а сдвиги $T_g \xi, g \in G$, независимы. Чтобы установить изоморфизм действий T и T' , достаточно построить в X разбиение η такое, что:

- разбиения $T_g \eta$ и $T_{g'} \eta$ независимы, если $g_1 \neq g_2$;
- η — образующее для T ;
- η имеет такое же распределение мер элементов, как и разбиение ξ' .

Для этого рассмотрим проекцию

$$p: X \rightarrow \prod_{h \in H} Y,$$

ограничивающую конфигурацию x на подгруппу $H \subset G$, порожденную эле-

ментом бесконечного порядка. Разбиение на прообразы точек при отображении p инвариантно относительно ограничения T на подгруппу H . Соответствующее фактор-действие изоморфно бернуллиевскому действию S группы H с пространством состояний (Y, ν) . Так как сдвиги Бернулли с равной энтропией на группе H изоморфны (см. ⁽¹⁾), то в пространстве $\prod_{h \in H} (Y, \nu)$ существует разбиение ξ такое, что:

- а) разбиения $S_h \xi$, $h \in H$, независимы;
- б) ξ — образующее для действия S ;
- в) ξ имеет такое же распределение мер элементов как и разбиение ξ' .

Прообраз η разбиения ξ относительно проекции p есть искомое разбиение в X .

В самом деле, по построению, η измеримо относительно σ -алгебры

$$\xi_H = \bigvee_{h \in H} T_h \xi.$$

Разбиение $T_g \eta$ измеримо относительно σ -алгебры

$$\xi_{Hg^{-1}} = \bigvee_{h \in H} T_{gh} \eta.$$

Поскольку σ -алгебры ξ_H и $\xi_{Hg^{-1}}$ независимы при $g \neq H$, то разбиения η и $T_g \eta$ независимы. Кроме того, по построению, независимы η и $T_h \eta$, если $h \in H$, $h \neq e$. Далее, сдвиги $T_h \eta$, $h \in H$, порождают σ -алгебру ξ_H , а сдвиги $T_{gh} \eta$, $h \in H$, порождают σ -алгебру $\xi_{Hg^{-1}}$ и, следовательно, разбиение η — образующее относительно действия T .

Нами фактически доказана

Теорема 2. Пусть G — счетная группа, H — ее подгруппа, $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ — такие стационарные случайные поля на G , что $f_g^{(i)}$ и $f_h^{(i)}$, $i=1, 2$, независимы, если $h \in H$ и $g \notin H$.

Тогда изоморфизм действий группы H , порожденных ограничениями случайных полей $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ на H , влечет изоморфизм действий группы G , порожденных полями $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$.

2. Назовем группу орнштейновской, если бернуллиевское действие этой группы полностью определяется своей энтропией. Непосредственно проверяется, что никакая конечная группа не является орнштейновской. Из теоремы 2 следует, что группа, содержащая орнштейновскую подгруппу, сама орнштейновская. В частности, непериодическая группа — орнштейновская.

Рассмотрим теперь счетные периодические группы. Оказывается, что очень широкий класс периодических групп содержится в классе орнштейновских групп. Роль подгруппы Z , с которой распространялся изоморфизм бернуллиевских действий в теореме 1, в случае периодических групп играет счетная локально-конечная группа. Оказывается, что конструкция Орнштейна ⁽¹⁾ применима к бернуллиевским действиям на счетных локально-конечных группах. Это обстоятельство основано на том, что для бернуллиевских действий локально-конечных групп имеет место свойство асимптотической равномерности энтропии. Точная формулировка такова.

Теорема 3. Пусть G — счетная локально-конечная группа, $\{G_n\}$ — возрастающая последовательность конечных групп, исчерпывающая G , T — бернуллиевское действие группы G , ξ — образующее бернуллиевское разбиение действия T , η — разбиение, являющееся укрупнением разбиения $\bigvee_{g \in G_n} T_g \xi$, $\mu_{n, \eta}(x)$ — мера элемента разбиения $\bigvee_{g \in G_n} T_g \eta$, содержащего x .

Тогда существует почти всюду предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|G_n|} \log \mu_{n, \eta}(x) = h(T, \eta).$$

Замечание. Весьма существенным обстоятельством является то, что разбиения, для которых предыдущая теорема устанавливает свойство асимптотической равномерности, образуют всюду плотное множество в пространстве разбиений с конечной энтропией.

Теорема 4. *Счетная группа, содержащая счетную локально-конечную подгруппу, орнштейновская.*

Теоремы 1 и 4 доказывают гипотезу А. А. Кириллова о том, что бернуллиевские сдвиги с равной энтропией на счетной коммутативной группе изоморфны ⁽²⁾.

3. Во введении отмечалось, что динамические системы с неклассическим временем возникают в связи с некоторыми задачами эргодической теории. Одной из них является задача метрической классификации убывающих последовательностей разбиений.

Пусть Γ — индуктивный предел конечных циклических групп Γ_n порядка q_n . Наш подход к задаче описания убывающих последовательностей разбиений состоит в следующем. Каждому изоморфизму T группы Γ в группу автоморфизмов пространства Лебега соответствует убывающая последовательность разбиений ξ_n на траектории подгруппы Γ_n . Обратно, для каждой убывающей последовательности Ξ разбиений ξ_n , элементы которых состоят из q_n точек с равной условной мерой, существует действие T группы Γ , порождающее последовательность Ξ указанным выше способом. Это действие не единственно. Класс действий $\mathcal{T}(\Xi)$ группы Γ , порождающих последовательность Ξ , содержит в себе всю информацию об этой последовательности.

Энтропия $h(\Xi)$ убывающей последовательности Ξ определена в ⁽³⁾ как верхняя грань по классу $\mathcal{T}(\Xi)$ энтропий $h(T)$, $T \in \mathcal{T}(\Xi)$. Колебание

функции $h(T)$ на классе $\mathcal{T}(\Xi)$ ограничено числом $\sum_{n=1}^{\infty} q_n^{-1} \log q_{n+1}$, если

этот ряд сходится (в случае, когда $h(T)$ бесконечна для некоторого действия $T \in \mathcal{T}(\Xi)$, это означает, что $h(S) = \infty$ для всех $S \in \mathcal{T}(\Xi)$). Следующий результат позволяет вывести постоянство функции $h(T)$ на классе $\mathcal{T}(\Xi)$ из ограниченности колебания этой функции на $\mathcal{T}(\Xi)$.

Теорема 5. *Действие с положительной энтропией счетной периодической подгруппы окружности имеет фактор-действие Бернулли с той же энтропией.*

Известно (см. ⁽³⁾), что для бернуллиевского действия группы Γ энтропия действия T/ξ_n фактор-группы Γ/Γ_n равна $|\Gamma_n| h(T)$. По теореме 5 это верно и для произвольного действия группы Γ . Таким образом, если на классе $\mathcal{T}(\Xi)$ имеется ненулевое колебание энтропии $h(T)$, скажем δ , то на классе $\mathcal{T}(\Xi/\xi_n)$ оно равно $|\Gamma_n| \delta$. С другой стороны, энтропии фактор-действий T/ξ_n и T'/ξ_n , где $T, T' \in \mathcal{T}(\Xi)$, различаются не более чем на

$$|\Gamma_n| \sum_{k=1}^{\infty} |\Gamma_k|^{-1} \log |\Gamma_{k+1}| - |\Gamma_n| \log |\Gamma_n| \sum_{k=1}^{\infty} |\Gamma_k|^{-1},$$

что может быть сделано меньше $|\Gamma_n| \delta$ при достаточно большом n .

Постоянство функции $h(T)$ на классе $\mathcal{T}(\Xi)$ дает способ вычисления энтропии $h(\Xi)$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
8 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ D. Ornstein, Adv. Math., v. 4, 337 (1970). ² А. А. Кириллов, УМН, т. 22, № 5 (1967). ³ А. М. Сренин, Функциональный анализ и его приложения, т. 5, в. 3 (1974).