

УДК 523.745

АСТРОНОМИЯ

Член-корреспондент АН СССР В. Е. СТЕПАНОВ,
В. М. ГРИГОРЬЕВ, И. М. КАЦ

ГЛУБИНА ВОЗНИКНОВЕНИЯ И СРЕДНЯЯ ГЛУБИНА МАГНИТОАКТИВНОЙ ЛИНИИ

Рассмотрим систему уравнений переноса излучения в спектральной линии поглощения для нерассеивающей магнитоактивной среды с матрицей поглощения Беккера (¹)

$$\begin{aligned}\mu y_1' &= ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 - aB, \\ \mu y_2' &= by_1 + ay_2 + ey_3 + fy_4 - bB, \\ \mu y_3' &= cy_1 - ey_2 + ay_3 + gy_4 - cB, \\ \mu y_4' &= dy_1 - fy_2 - gy_3 + ay_4 - dB;\end{aligned}\tag{1}$$

здесь $y_i = y_i(\tau)$ — неизвестные функции Стокса, $i=1, 2, 3, 4$, $\tau \geq 0$ — оптическая глубина, штрих означает дифференцирование по τ ; $B=B(\tau)$ — функция первичных источников излучения; $\mu > 0$ — угловой параметр, определяющий направление распространения излучения. Остальные коэффициенты — элементы матрицы поглощения — зависят от τ , и вид этой зависимости определяется моделью атмосферы и моделью магнитного поля.

Обычно к уравнениям (1) добавляется условие на бесконечности

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \exp(-\lambda \tau) y_i(\tau) = 0, \quad \lambda = \text{const} > 0, \quad i=1, 2, 3, 4,\tag{2}$$

обеспечивающее существование единственного решения (1), если B удовлетворяет условию, аналогичному (2), и собственные числа матрицы поглощения (их вещественная часть) ограничены в совокупности снизу константой λ . Как правило, все эти условия на практике выполнены.

Функции Стокса, определяемые задачей (1), (2), имеют различный физический смысл: y_1 есть полная интенсивность излучения, а $p = (y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)^{1/2}$ есть та часть этой интенсивности, которая полностью поляризована.

Наряду с системой (1) рассмотрим систему уравнений

$$\mu u_1' = au_1 - aB, \quad u_2 = u_3 = u_4 = 0\tag{3}$$

и отклонения $v_i = y_i - u_i$, $i=1, 2, 3, 4$, которые, очевидно, удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\mu v_1' &= av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4, \\ \mu v_2' &= bv_1 + av_2 + ev_3 + fv_4 + br, \\ \mu v_3' &= cv_1 - ev_2 + av_3 + gv_4 + cr, \\ \mu v_4' &= dv_1 - fv_2 - gv_3 + av_4 + dr,\end{aligned}\tag{4}$$

где

$$r = u_1 - B.\tag{5}$$

Оценим отклонение в интенсивности v_1 и в поляризации

$$p = (v_2^2 + v_3^2 + v_4^2)^{1/2} = (y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)^{1/2}.\tag{6}$$

$$E=E(\tau, s)=\exp\left(-\frac{1}{\mu}\int_{\tau}^s a(z)dz\right); \quad (7)$$

$$\alpha^2=\alpha^2(\tau)=\frac{1}{\mu}\int_{\tau}^{\infty} 2aE^2(\beta^2+\gamma^2+\delta^2)ds, \quad \alpha<1, \quad (8)$$

$$\beta=b/a, \quad \gamma=c/a, \quad \delta=d/a, \quad a>1;$$

$$V=\max_{\tau\leq s<\infty}|v_1(s)|, \quad P=\max_{\tau\leq s<\infty}|p(s)|, \quad R=\max_{\tau\leq s<\infty}|r(s)|. \quad (9)$$

Умножим каждое i -е уравнение в (4) на v_i и потом сложим три последних уравнения. После интегрирования получим

$$v_1^2=-\frac{1}{\mu}\int_{\tau}^{\infty} 2aE^2(\beta v_2+\gamma v_3+\delta v_4)v_1 ds, \quad (10)$$

$$p^2=-\frac{1}{\mu}\int_{\tau}^{\infty} 2aE^2(\beta v_2+\gamma v_3+\delta v_4)(v_1+r) ds.$$

Применяя к каждому из последних интегралов неравенства Буняковского — Шварца и Коши, найдем оценки

$$P\leq R\alpha/(1-\alpha^2), \quad V\leq \alpha P. \quad (11)$$

Напомним, что матрица A коэффициентов в системе уравнений (1), (4) имеет структуру

$$A(\tau)=\eta(\tau)a(\tau)+E,$$

где $\eta(\tau)$ — функция центрального поглощения — отношение коэффициента селективного поглощения в центре линии к коэффициенту непрерывного поглощения, E — единичная матрица, a — частотно-угловая матрица, $|a_{ij}|\leq 1$.

Предположим теперь, что

$$d\eta/d\tau\leq 0, \quad (12)$$

т. е. что $\eta(\tau)$ монотонно убывает с ростом τ . Это предположение выполняется практически для всех моделей атмосфер при не слишком малых τ . Тогда, используя конкретный вид матрицы Беккера, можно показать, что

$$\alpha\leq \eta/(\eta+2). \quad (13)$$

Далее предположим, что существует такое τ_{∞} , что для всех $\tau\geq \tau_{\infty}$ выполняются неравенства*

$$B'(\tau)\geq 0, \quad B''(\tau)\leq 0, \quad (14)$$

т. е. касательная к $B(s)$ в любой точке $\tau\geq \tau_{\infty}$ лежит при $s>\tau$ выше кривой $B(s)$:

$$B(s)\leq B(\tau)+(s-\tau)B'(\tau). \quad (15)$$

Теперь оценим $R(\tau)$. Имеем

$$r(\tau)=\frac{1}{\mu}\int_{\tau}^{\infty} a(s)E(\tau, s)[B(s)-B(\tau)]ds\leq \mu B'(\tau).$$

* Для моделей ВСА⁽²⁾, Моз — Малтби⁽³⁾ и Хену⁽⁴⁾ они выполняются, начиная с $\tau_{\infty}=0,01$.

и, стало быть,

$$R(\tau) \leq \mu B'(\tau). \quad (16)$$

Наконец, если $y_0(\tau)$ — интенсивность непрерывного спектра, то она удовлетворяет уравнению $\mu y_0' = y_0 - B$, а $v_0 = y_0 - u_1$ удовлетворяет уравнению $\mu v_0' = a v_0 - (a-1)(y_0 - B)$, откуда с учетом (14) и с учетом конкретной структуры элемента a (см. (1)) находим

$$v_0 = v_0(\tau) = \frac{1}{\mu} \int_{\tau}^{\infty} (a-1) E(y_0 - B) ds \leq \mu B' \eta / (1 + \eta). \quad (17)$$

Таким образом, полученные оценки показывают, что отличие линии от континуума становится несущественным, т. е. $|y_1 - y_0| \leq |y_1 - u_1| + |u_1 - y_0| \leq V + v_0 \leq \epsilon_i$, если для любого, как угодно малого $\epsilon_i > 0$ существует такое τ_i , что при всех $\tau \geq \tau_i$ верно неравенство

$$\Delta y = \Delta y(\tau) = \mu B' \eta (1 + \eta/4) / (1 + \eta) \leq \epsilon_i, \quad (18)$$

э поляризационные эффекты в линии становятся несущественными ($P \leq \epsilon_p$), если для любого $\epsilon_p > 0$ существует такое τ_p , что при всех $\tau \geq \tau_p$ верно неравенство

$$\Delta p = \Delta p(\tau) = \mu B' \eta [1 + 1/(1 + \eta)] / 4 \leq \epsilon_p. \quad (19)$$

Неравенства (18), (19) можно усилить, если при их выводе не пользоваться (13), оставляя лишь (11), (16). Тогда Δy и Δp вместе с α становятся зависимыми от частоты внутри линии. В расчетах целесообразно иметь дело не с абсолютными отклонениями Δy и Δp , а с относительными $\delta y = \Delta y / y_0$, $\delta p = \Delta p / y_0$. Функции δy и δp убывают с ростом τ , поэтому корень τ_i уравнения

$$\delta y(\tau) = \epsilon_i \quad (20)$$

назовем глубиной возникновения линии, а корень τ_p уравнения

$$\delta p(\tau) = \epsilon_p \quad (21)$$

назовем глубиной возникновения поляризационных эффектов в ней. Здесь ϵ_i и ϵ_p имеют смысл нормированной депрессии полной интенсивности и поляризованной ее части.

Хотя поляризация в линии целиком обусловлена магнитным полем и возникает на всех глубинах, на которых имеется поле, перенос поляризованного излучения зависит от величины коэффициента поглощения в линии. Поэтому при $\epsilon_i = \epsilon_p$ уравнения (20), (21) определяют такие τ_i и τ_p , для которых выполняется неравенство $\tau_p \leq \tau_i$. Однако и из теории, и из эксперимента известно, что для магнитоактивных линий величина поляризованной части интенсивности примерно на порядок меньше полной интенсивности. При таком соотношении ϵ_i и ϵ_p уравнения (20), (21) могут определить $\tau_p > \tau_i$.

Таблица 1

ϵ	0,50	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05	0,01	0,005
ВСА	0,40	0,55	0,65	0,70	0,85	1,30	2,35	2,50
М — М	0,50	0,70	0,70	0,70	0,70	0,70	1,05	1,50
Хену	3,35	5,25	7,10	7,35	9,55	15,0	43,0	43,6

В табл. 1 приведены τ_i при различных ϵ_i , рассчитанные согласно (20) для модели ВСА солнечной фотосферы (2), для модели Моэ — Малтби полутени солнечного пятна (3) и для модели Хену тени пятна (4). В последней графе этой таблицы приводятся τ_p при $\epsilon_p = 0,005$, рассчитанные согласно (21) для тех же моделей.

Из полученных выше неравенств следует, что функция $u_1(\tau)$, определяемая уравнением (3), является приближением для полной интенсив-

ности излучения $y_1(\tau)$, определяемой (1), и это приближение тем точнее, чем больше τ . Для τ , близких к нулю, это приближение будет становиться все более грубым, однако u_1 может быть использовано для приближенного вычисления средней глубины линии. Как известно (см., например, (5)), средняя (эффективная) глубина $\bar{\tau}$ линии определяется как

$$\bar{\tau} = \left\{ \int_0^{\infty} \tau \left[\frac{1}{\mu} \exp \left(-\frac{\tau}{\mu} \right) B(\tau) - Y(\tau) \right] d\tau \right\} / [y_0(0) - y_1(0)], \quad (22)$$

где

$$y_1(0) = \int_0^{\infty} Y(\tau) d\tau \quad (23)$$

есть полная интенсивность излучения, покидающего границу атмосферы (решение задачи (1), (2) при $\tau=0$),

$$y_0(0) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{\tau}{\mu} \right) B(\tau) d\tau$$

есть интенсивность непрерывного спектра.

Вычисление $\bar{\tau}$ для неоднородных моделей атмосфер и магнитных полей связано с численным интегрированием системы (1), (2) и с трудностью интегрального представления (23). Поэтому мы предлагаем приближенную формулу средней глубины магнитоактивной линии, которая получается из (22) заменой y_1 на u_1 :

$$\bar{\tau} = \left\{ \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \tau \left[\exp \left(-\frac{\tau}{\mu} \right) - a(\tau) E(0, \tau) \right] B(\tau) d\tau \right\} / [y_0(0) - u_1(0)]; \quad (24)$$

$$u_1(0) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} a(\tau) E(0, \tau) B(\tau) d\tau. \quad (25)$$

Чтобы судить о близости $\bar{\tau}$ к $\bar{\tau}$, мы провели оценку величины

$$\delta\tau = |\bar{\tau} - \bar{\tau}| / \bar{\tau}$$

для модели Милна — Эддингтона ($\eta = \text{const}$) с линейной функцией источников $B(\tau) = 1 + \beta\tau$, продольным и поперечным однородным магнитным полем при $\mu=1$. Оказалось, что $\delta\tau < 15\%$ независимо от направления и напряженности поля, независимо от частоты внутри линии и независимо от величины η и β . Это позволяет надеяться, что приведенная оценка $\delta\tau$ близка к соответствующим значениям и для неоднородных моделей и поэтому для таких моделей формула (24) может быть полезной.

Напомним, что все результаты в этой заметке относятся к чистопоглощающей ЛТР-атмосфере.

В заключение выражаем благодарность Бруно Мартузану за постоянное внимание к работе и полезные дискуссии.

Сибирский институт земного магнетизма, ионосферы
и распространения радиоволн
Сибирского отделения Академии наук СССР
Иркутск

Поступило
30 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ J. M. Beckers, Solar Phys., v. 9, 372 (1969). ² O. Gingerich, C. de Jager, *ibid.*, v. 3, 5 (1968). ³ O. Kjeldseth Moe, P. Maltby, *ibid.*, v. 8, 275 (1969). ⁴ J. C. Henoux, Astronomy and Astrophys., v. 2, № 3, 288 (1969). ⁵ J. Staude, Solar Phys., v. 24, 255 (1972).