

В. М. ТЕШУКОВ

# ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКИХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ КОНИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 27 I 1975)

Рассматривается вопрос о существовании в целом решения задачи Гурса для уравнения плоских конических потенциальных течений политропного газа. Эта задача возникает при изучении некоторых двумерных конфигураций распада разрыва (<sup>1-3</sup>).

1. Постановка задачи. Плоские потенциальные конические течения политропного газа описываются квазилинейным уравнением

$$\begin{aligned} ((\varphi_{\xi} - \xi) - c^2) \varphi_{\xi\xi} + 2(\varphi_{\xi} - \xi)(\varphi_{\eta} - \eta) \varphi_{\xi\eta} + ((\varphi_{\eta} - \eta)^2 - c^2) \varphi_{\eta\eta} = 0, \\ c^2 = (\gamma - 1)(\xi \varphi_{\xi} + \eta \varphi_{\eta} - \varphi - \frac{1}{2}(\varphi_{\xi}^2 - \varphi_{\eta}^2)); \end{aligned} \quad (1)$$

здесь  $\varphi$  — потенциал вектора скорости  $\mathbf{u} = (u, v)$ :  $\varphi_{\xi} = u$ ,  $\varphi_{\eta} = v$ ;  $c$  — скорость звука,  $\gamma$  — показатель политропы,  $\xi = x/t$ ,  $\eta = y/t$ ;  $x, y$  — декартовы координаты на плоскости,  $t$  — время. Тип уравнения (1) зависит от решения, а именно: при  $|\nabla\varphi - \xi| > c > 0$  уравнение гиперболично, при  $|\nabla\varphi - \xi| < c$  уравнение эллиплично, а при  $|\nabla\varphi - \xi| = c$  или  $c = 0$  параболически вырождается.

Пусть известно решение  $\varphi_0$  уравнения (1) по одну сторону характеристики (на решении  $\varphi_0$ )  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , выпущенных из точки  $\xi_0$  плоскости  $\xi, \eta$ . Требуется определить решение  $\varphi$  в области влияния характеристик  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , если  $\varphi = \varphi_0$  на  $\Gamma_1, \Gamma_2$ .

Перейдем к характеристическим переменным  $\alpha, \beta$  (<sup>4</sup>) с помощью соотношений

$$\eta_{\alpha} = \operatorname{tg}(\theta + A) \xi_{\alpha}, \quad \eta_{\beta} = \operatorname{tg}(\theta - A) \xi_{\beta},$$

где  $\theta = \operatorname{arctg}[(\eta - v)/(\xi - u)]$ ,  $A = \operatorname{arcsin}[c/|\mathbf{u} - \xi|]$ . При этом предполагается, что  $\xi - u > 0$  в некоторой окрестности характеристик  $\Gamma_1, \Gamma_2$ . Уравнение (1) заменяется характеристической системой уравнений

$$\begin{aligned} A_{\alpha} + \theta_{\alpha} + f(A) c_{\alpha}/c = 0, \quad A_{\beta} - \theta_{\beta} + f(A) c_{\beta}/c = 0, \\ (\gamma - 1) u_{\alpha} + 2 \sin(\theta - A) c_{\alpha} = 0, \quad (\gamma - 1) u_{\beta} - 2 \sin(\theta + A) c_{\beta} = 0, \\ (\gamma - 1) v_{\alpha} - 2 \cos(\theta - A) c_{\alpha} = 0, \quad (\gamma - 1) v_{\beta} + 2 \cos(\theta + A) c_{\beta} = 0; \end{aligned} \quad (2)$$

здесь  $(\gamma - 1)f(A) = \operatorname{tg} A (4 \cos^2 A - \gamma - 1)$ . Искомыми функциями являются  $A, \theta, u, v, c$ .

Если известно решение системы (2), то можно определить  $\xi, \eta$ :

$$\xi = u + c \cos \theta / \sin A, \quad \eta = v + c \sin \theta / \sin A. \quad (3)$$

При условии однолиственности отображения  $(\alpha, \beta) \rightarrow (\xi, \eta)$ , определяемого этими формулами, находится некоторое решение уравнения (1) в плоскости  $\xi, \eta$ .

Якобиан перехода

$$J = \frac{D(\xi, \eta)}{D(\alpha, \beta)} = - \frac{\sin 2A}{\cos(\theta - A) \cos(\theta + A)} \xi_{\alpha} \xi_{\beta};$$

величины  $\xi_\alpha, \xi_\beta$  вычисляются, в силу (3), как

$$\begin{aligned}\xi_\alpha &= \frac{c \cos(\theta+A)}{\sin^2 A} U, & U &= \frac{2}{\gamma-1} \operatorname{tg} A \left( \frac{\gamma+1}{2} - \cos^2 A \right) \frac{c_\alpha}{c} - A_\alpha, \\ \xi_\beta &= \frac{c \cos(\theta-A)}{\sin^2 A} V, & V &= \frac{2}{\gamma-1} \operatorname{tg} A \left( \frac{\gamma+1}{2} - \cos^2 A \right) \frac{c_\beta}{c} - A_\beta.\end{aligned}\quad (4)$$

Граничные данные для системы (2), соответствующие задаче Гурса, определяются заданным решением  $\varphi_0$  и соответствием  $(\alpha, \beta)$  и  $(\xi, \eta)$  на  $\Gamma_1, \Gamma_2$ . Условия совместности уравнений (2) приводят к системе двух уравнений второго порядка относительно искомых функций  $C = \ln c$  и  $A$ :

$$2A_{\alpha\beta} + (f(A)C_\alpha)_\beta + (f(A)C_\beta)_\alpha = 0, \quad C_{\alpha\beta} + \psi(A)C_\alpha C_\beta = 0, \quad (5)$$

где  $\psi(A) = 1 + \operatorname{tg} A \cdot f(A)$ . Исходная задача Гурса редуцируется к задаче Гурса для системы (5).

Требуется найти решение системы (5) в подобласти характеристического прямоугольника  $0 \leq \alpha \leq \alpha_1, 0 \leq \beta \leq \beta_1$ , задаваемой соотношениями  $c > 0, 0 < A < \pi/2$ , если известны

$$C|_{\alpha=0} = C_1(\beta), \quad C|_{\beta=0} = C_2(\alpha), \quad A|_{\alpha=0} = A_1(\beta), \quad A|_{\beta=0} = A_2(\alpha). \quad (6)$$

Если функции  $A$  и  $C$  найдены, то остальные искомые функции находят-ся квадратурами из уравнений (2).

2. Существование решения. Проинтегрировав уравнения (5), получим систему интегральных уравнений типа Вольтерра

$$2A + \int_0^\beta f(A)C_\alpha d\alpha + \int_0^\beta f(A)C_\beta d\beta = m(\alpha, \beta, 0, 0), \quad (7)$$

$$C_\alpha = C_2(\alpha) \exp \left( - \int_0^\beta \psi(A)C_\beta d\beta \right), \quad C_\beta = C_1'(\beta) \exp \left( - \int_0^\alpha \psi(A)C_\alpha d\alpha \right);$$

здесь  $m(\alpha, \beta, \alpha_0, \beta_0) = (A + \theta)(\alpha_0, \beta) + (A - \theta)(\alpha, \beta_0)$  — функция, которая вычисляется по граничным данным вида (6), заданным при  $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0$ .

**Л е м м а 1.** Пусть функции  $C_1(\beta), C_2(\alpha), m(\alpha, \beta, 0, 0)$  — непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют неравенствам

$$|C_1'(\beta)| < K, \quad |C_2'(\alpha)| < K, \quad |m(\alpha, \beta, 0, 0)| < \pi - \sigma \quad (\sigma > 0)$$

при  $(\alpha, \beta) \in M_\delta = [0, \delta_1] \times [0, \delta_1]$ .

Тогда существует постоянная  $\delta(k, \delta_1, \sigma)$  такая, что система (7) однозначно разрешима в классе функций  $C^1(M_\delta)$ . Кроме того существуют производные  $A_{\alpha\beta}, C_{\alpha\beta}$ , удовлетворяющие уравнениям (5).

Это доказывается применением метода последовательных приближений к системе (7).

Далее изучаются свойства решения задачи Гурса в классе граничных данных (6), удовлетворяющих некоторым условиям монотонности. Если

$$C_1'(\beta) < 0, \quad C_2'(\alpha) < 0, \quad (A)$$

то  $C_\alpha(\alpha, \beta) < 0, C_\beta(\alpha, \beta) < 0$  в области определения решения. В дальнейшем предполагаем условие (A) выполненным.

Введем обозначения:  $\Phi = A_\alpha + f(A)C_\alpha, Q = A_\beta + f(A)C_\beta$ ; при  $1 < \gamma < 3$   $A_0 = \arcsin(\sqrt{3-\gamma}/2)$ ,  $f(A_0) = 0$ ,  $A_1$  — положительный корень уравнения  $f'(A) = 0, A_1 < A_0$ ;  $A_0 = 0$  при  $\gamma > 3$ .

**Л е м м а 2.** Пусть функция  $A$  удовлетворяет неравенствам  $A \geq A_1$  в случае  $1 < \gamma < 3, A \geq 0$  при  $\gamma \geq 3$ . Если граничные данные (6) таковы, что либо: (B)  $\Phi(\alpha, 0) < 0, Q(0, \beta) < 0$ , либо (C)  $\Phi(\alpha, 0) > 0, Q(0, \beta) > 0$ , то в области определения решения  $\Phi(\alpha, \beta) < 0, Q(\alpha, \beta) < 0$  в случае (B) и  $\Phi(\alpha, \beta) > 0, Q(\alpha, \beta) > 0$  в случае (C).

Функции  $\Phi$  и  $Q$  в силу уравнения (5) удовлетворяют системе линейных однородных уравнений. Интегрируя эти уравнения, получаем требуемое утверждение.

**Следствие.** Пусть  $A(0, 0) > A_0$ ,  $m(\alpha, \beta, 0, 0) < \pi - \sigma$  ( $\sigma > 0$ ) и граничные данные удовлетворяют условиям (С).

Тогда для решения системы (5) справедливы оценки

$$A_0 < A(\alpha, \beta) < (\pi - \sigma)/2, \quad |m(\alpha, \beta, \alpha_0, \beta_0)| < \pi - \sigma$$

в области  $s > 0$ .

Пусть  $1 < \gamma < 3$ ,  $A(0, 0) < A_0$ ,  $m(\alpha, \beta, 0, 0) > 2A$ , а граничные данные удовлетворяют условиям (В).

Тогда справедливы неравенства

$$A_1 < A < A_0, \quad |m(\alpha, \beta, \alpha_0, \beta_0)| < \pi - \sigma_1, \quad \sigma_1 = \sigma_1(\gamma, \sigma) > 0,$$

в области  $s > 0$ .

Эти оценки получаются интегрированием неравенств леммы 2.

**Лемма 3.** Пусть  $0 < A < \pi/2$ , тогда для функции с справедлива оценка:

$$c(\alpha, \beta) \geq N(\alpha, \beta, \alpha_0, \beta_0) = c^s(\alpha_0, \beta) + c^s(\alpha_0, \beta_0) - c^s(\alpha_0, \beta_0)^{1/s},$$

где  $s = s(\gamma) \geq 1$ ,  $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ ,  $0 \leq \beta_0 \leq \beta \leq \beta_1$ .

Для доказательства этой оценки нужно найти  $\min_A (-\psi(A))$  и проинтегрировать дифференциальное неравенство, получающееся из уравнения для  $S$  системы (5).

**Лемма 4.** Пусть граничные данные (5) удовлетворяют неравенствам

$$U(\alpha, 0) < 0, \quad V(0, \beta) < 0. \quad (E)$$

Тогда в области определения решения задачи Гурса  $U(\alpha, \beta) < 0$ ,  $V(\alpha, \beta) < 0$ .

Эта лемма доказывается так же, как лемма 2, интегрированием линейной однородной системы уравнений для функции  $U, V$ .

Сформулированные свойства решений позволяют доказать существование решения в характеристическом прямоугольнике вплоть до линии вырождения  $c=0$ .

**Теорема.** Пусть заданные функции  $C_1(\beta)$ ,  $C_2(\alpha)$ ,  $m(\alpha, \beta, 0, 0)$  непрерывно дифференцируемы при  $\alpha \in [0, \alpha_1]$ ,  $\beta \in [0, \beta_1]$ ,  $c(\alpha_1, 0) = c(0, \beta_1) = 0$  и выполнена одна из двух групп условий:

(I)  $A(0, 0) \geq A$ ,  $m(\alpha, \beta, 0, 0) < \pi - \sigma$  ( $\sigma > 0$ ), условия (А), (С);

(II)  $1 < \gamma < 3$ ,  $A(0, 0) \leq A_0$ ,  $m(\alpha, \beta, 0, 0) > 2A_1$ , условия (А), (В), (Е).

Тогда существует классическое решение задачи Гурса (6), (7) в области  $D$ , граница которой состоит из отрезков характеристик

$$I_1 = \{\alpha, \beta: \alpha=0, \beta \in [0, \beta_1]\}, \quad I_2 = \{\alpha, \beta: \beta=0, \alpha \in [0, \alpha_1]\}$$

и кривой  $\Gamma$ , на которой  $c=0$ . Отображение  $(\alpha, \beta) \rightarrow (\xi, \eta)$  в области  $D$  является однолиственным.

Построим решение в области  $D_\varepsilon$ , граница которой состоит из отрезков характеристик

$$I_{1\varepsilon} = \{\alpha, \beta: \alpha=0, \beta \in [0, \beta_1(\varepsilon)]\}, \quad I_{2\varepsilon} = \{\alpha, \beta: \beta=0, \alpha \in [0, \alpha_1(\varepsilon)]\}$$

и ломаной  $\Gamma_\varepsilon$ , на которой  $\varepsilon \leq c \leq 2\varepsilon$ . Величины  $\alpha_1(\varepsilon)$  и  $\beta_1(\varepsilon)$  определяются из уравнений  $c(\alpha_1(\varepsilon), 0) = c(0, \beta_1(\varepsilon)) = 2\varepsilon$ .

Существует постоянная  $\alpha_0(\varepsilon)$  такая, что в прямоугольнике  $0 \leq \beta \leq \beta_1(\varepsilon)$ ,  $0 \leq \alpha \leq \alpha_0(\varepsilon)$  выполнена априорная оценка  $c \geq \varepsilon$ . Действительно, по лемме 3  $c(\alpha, \beta_1(\varepsilon)) \geq N(\alpha, \beta_1(\varepsilon), 0, 0)$  и существование  $\alpha_0(\varepsilon)$  следует из непрерывной дифференцируемости граничных данных на отрезке  $I_{2\varepsilon}$ . В области  $c \geq \varepsilon$ ,  $0 < A < (\pi - \sigma)/2$  справедливы неравенства  $|C_\alpha| < K(\varepsilon, \sigma)$ ,  $|C_\beta| < K(\varepsilon, \sigma)$ . В силу следствия леммы 2, решение может быть построено

последовательным применением леммы 1 в прямоугольнике, указанном выше. Применяя аналогичные рассуждения к задаче Гурса с данными при  $\alpha = \alpha_0(\varepsilon)$ ,  $\beta = 0$ , доказываем существование решения в прямоугольнике  $\alpha_0(\varepsilon) \leq \alpha \leq 2\alpha_0(\varepsilon)$ ,  $0 \leq \beta \leq \beta_2(\varepsilon)$  ( $c(\alpha_0(\varepsilon), \beta_2(\varepsilon)) = 2\varepsilon$ ) и т. д. Через конечное число шагов область  $D_\varepsilon$  построена. Взяв  $D = \bigcup_{\varepsilon > 0} D_\varepsilon$ , мы получаем область  $D$ ,

о которой говорится в условии теоремы. Функция  $c$  непрерывна в  $D$  по построению. Непрерывность функции  $A$  следует из уравнений (6) и условий монотонности. Оказывается, что при  $c=0$   $A=A_0$ .

При повороте системы координат  $\xi, \eta$  на угол  $\tau$  величина  $\theta$  изменяется на  $\tau$ . Выбирая соответствующую систему координат  $\xi, \eta$ , имеем  $(A+\theta) \cdot (\alpha, \beta) < (\pi - \sigma)/2$ ,  $(A - \theta)(\alpha, 0) < (\pi - \sigma)/2$  в случае II. Тогда в области  $D$  справедливы неравенства

$$|A \pm \theta| < (\pi - \sigma)/2, \quad |\theta| < (\pi - \sigma)/2 - A_0; \quad (I)$$

$$|A \pm \theta| < 2A_0 - A_1, \quad |\theta| < A_0 - A_1. \quad (II)$$

Отсюда и из леммы 4 следует, что  $\xi_\alpha < 0$ ,  $\xi_\beta < 0$  в  $D$  и конечны.

Рассмотрим линии уровня функции  $\xi(\alpha, \beta)$ . Это кривые, однозначно проектирующиеся на оси  $\alpha, \beta$  и расслаивающие область  $D$ , так как вдоль любого луча в первом квадранте плоскости  $\alpha, \beta$  значение  $\xi$  изменяется монотонно. Начинаются и оканчиваются линии уровня на границах  $\alpha=0$ ,  $\beta=0$  либо на линии вырождения  $c=0$ . На линии вырождения  $\xi=u$ ,  $\eta=v$ ; для  $1 < \gamma < 3$  это следует из того, что  $\sin A_0 \neq 0$ ; для  $\gamma > 3$  — из неравенств леммы (2). Легко проверяется, что вдоль линии уровня  $\xi = \xi_1$  и вдоль границы  $c=0$  величина  $\eta$  изменяется монотонно. Если  $\xi(\alpha_1, \beta_1) = \xi(\alpha_2, \beta_2)$ , то эти точки либо лежат на одной линии уровня  $\xi$ , либо соединяются отрезками линии вырождения и линии уровня  $\xi$ . В силу монотонности  $\eta$  получаем  $(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_2)$ .

В качестве примера рассмотрим задачу об истечении в вакуум политропного газа, находившегося в момент времени  $t=0$  внутри двугранного угла  $x > |y| \operatorname{tg} \tau$ . Точное решение при  $\operatorname{tg}^2 \tau = (\gamma+1)/(3-\gamma)$ ,  $1 < \gamma < 3$ , найдено в (2) и соответствует  $A = A_0$ . В зависимости от выполнения неравенств  $\operatorname{tg}^2 \tau \leq (\gamma+1)/(3-\gamma)$  или  $\operatorname{tg}^2 \tau \geq (\gamma+1)/(3-\gamma)$ , возникают случаи  $A \geq A_0$  или  $A \leq A_0$ . Соответствующие условия монотонности здесь оказываются выполненными, что позволяет доказать существование решения этой задачи.

В заключение автор благодарит чл.-корр. АН СССР Л. В. Овсянникова за внимание к работе и полезные советы.

Институт гидродинамики  
Сибирского отделения Академии наук СССР  
Новосибирск

Поступило  
28 XII 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Е. В. Ермолин, Л. И. Рубина, А. Ф. Сидоров, ПММ, т. 32, в. 5, 946 (1968).  
<sup>2</sup> В. А. Сучков, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 74, ч. I, 156 (1966).  
<sup>3</sup> L. E. Levine, ZAMM, В. 52, № 9, 441 (1972). <sup>4</sup> Р. Курант, Уравнения с частными производными, М., 1964.