

В. А. ТКАЧЕНКО

О СПЕКТРАЛЬНОМ СИНТЕЗЕ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

(Представлено академиком С. М. Никольским 30 I 1975)

1. В 1947 г. Л. Шварц в связи с построением теории функций, периодических в среднем, рассмотрел следующую задачу спектрального синтеза:

Пусть J — инвариантное относительно дифференцирования (или сдвига) замкнутое подпространство пространства целых функций одной комплексной переменной z с топологией равномерной сходимости на каждом компакте. Совпадает ли J с замыканием линейной оболочки функций вида $z^h \exp \mu z$, содержащихся в J ? Л. Шварц получил положительный ответ на этот вопрос ⁽¹⁾.

Аналогичная задача может быть естественно поставлена для произвольного пространства аналитических функций, инвариантного относительно обычного или обобщенного дифференцирования. В работах ⁽²⁻⁵⁾ получено ее решение для ряда топологических пространств, сопряженные с которыми наделены структурой топологической алгебры. В работах ⁽⁶⁾ проблема Л. Шварца решена для пространства функций, голоморфных в выпуклой области Ω с топологией равномерной сходимости на внутренних компактах.

В настоящей заметке, примыкающей к ⁽⁷⁾, исследуется возможность спектрального синтеза в пространствах аналитических функционалов, описание которых воспроизводится в п. 2.

2. Пусть функция $H(\theta)$ тригонометрически выпукла ⁽⁸⁾ при заданном порядке $\rho > 0$ и принимает значения в $(-\infty, \infty]$. Обозначим через $\mathfrak{M}(H)$ множество функций того же класса, удовлетворяющих неравенству $h(\theta) < H(\theta)$. Предположим, что функция $H(\theta)$ непрерывна на каждом замкнутом интервале, где она конечна и $\mathfrak{M}(H) \neq \emptyset$. Каждая функция $h \in \mathfrak{M}(H)$ определяет банахово пространство целых функций $\mathcal{F}_h$, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_h = \sup_{r, \theta} |\varphi(re^{i\theta})| \exp[-h(\theta)r^\rho], \quad h \in \mathfrak{M}(H).$$

Индуктивный предел семейства $\{\mathcal{F}_h\}$ обозначим через $\mathcal{F}$ и положим $\mathcal{E} = \mathcal{F}^*$.

В пространстве $\mathcal{F}$ непрерывно действует оператор A умножения на независимую переменную, а в $\mathcal{E}$ — сопряженный оператор $D = A^*$. Очевидно, F является топологическим модулем над кольцом полиномов ^{*}.

Если $H(\theta) > 0$, то $\mathcal{F}$ с помощью обобщенного преобразования Бореля по функции Миттаг — Леффлера $E_\rho(\mu; 1)$; 1) можно реализовать как пространство $A(\Omega)$ функций, аналитических в ρ -выпуклой области Ω , для которой $H(-\theta)$ является ρ -опорной функцией ⁽⁹⁾. При такой реализации D оказывается оператором обобщенного дифференцирования Гельфонда — Леонтьева ⁽¹⁰⁾ по функции $E_\rho(\mu; 1)$:

$$D \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Gamma \left(\frac{k}{\rho} + 1 \right) \Gamma^{-1} \left(\frac{k-1}{\rho} + 1 \right) z^{k-1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in A(\Omega), \quad (*)$$

который отображает $A(\Omega)$ в себя.

* А также над кольцом целых функций минимального типа при порядке ρ .

Если $\rho=1$, то Ω является плоской выпуклой областью *, $E_\rho(\mu; 1) = \exp \mu$ и $D=d/dz$. В этом случае излагаемые ниже результаты эквивалентны результатам, которые были ранее получены И. Ф. Красичковым-Терновским ^(6a, 6).

3. Лемма 1. Пусть σ — некоторая система пар чисел $\{\mu, k\}$, где $\mu \in \mathbb{C}^1$ и $k \geq 0$ целое, и пусть

$$I_\sigma = \bigcap_{(\mu, k) \in \sigma} \{\varphi \in \mathcal{F}: \varphi(\mu) = \dots = \varphi^{(k)}(\mu) = 0\}.$$

Для каждой функции $\varphi \in I_\sigma$, $\varphi \neq 0$, плотна в I_σ система функций $\{\frac{P}{q} \varphi\}$, где (p, q) пробегает все такие пары многочленов, что $\frac{P}{q} \varphi \in I_\sigma$.

Это утверждение обобщает соответствующий результат работы ^(6a), где он установлен для $\rho=1$.

При исследовании инвариантных подпространств оператора D оказывается полезным следующее описание топологии пространства $\mathcal{F}$.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{M}(H)$ — класс всех функций $m(z) > 0$, $z \in \mathbb{C}^1$, обладающих свойствами:

- 1) $\inf_{z \in K} m(z) > 0$ для любого компакта $K \subset \mathbb{C}^1$;
- 2) $\lim_{r \rightarrow \infty} m^{-1}(re^{i\theta}) \exp(h(\theta)r^\rho) = 0$ равномерно по θ при $h \in \mathcal{M}(H)$.

Тогда множества

$$V_m = \{\psi \in \mathcal{F}: |\varphi(re^{i\theta})| \leq m(re^{i\theta})\}, \quad m \in \mathcal{M}(H),$$

образуют базис окрестностей нуля в $\mathcal{F}$.

Отметим, что указанное свойство топологии пространства $\mathcal{F}$ по духу соответствует наличию аналитической равномерной структуры (AU -structure) Эренпрайса ⁽¹¹⁾ и при $\rho=1$ получено в ^(6a).

4. Для каждого $\mu \in \mathbb{C}^1$ и целого $k \geq 0$ определим вектор $\delta_\mu^k \in \mathcal{E}$ равенством

$$\langle \delta_\mu^k, \varphi \rangle = \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(\mu), \quad \varphi \in \mathcal{F}.$$

Нетрудно проверить, что система $\{\delta_\mu^k\}_{k=0}^\infty$ образует полную корневую цепочку оператора D при собственном числе μ . Если $J(\subset \mathcal{E})$ — инвариантное подпространство ** и $\delta_\mu^k \in J$, то $\delta_\mu^r \in J$ для $r=0, 1, \dots, k$ и найдется такое целое число $p > k$, что $\delta_\mu^p \notin J$. Это обстоятельство делает естественным следующее

Определение. Спектром инвариантного подпространства J называется множество пар чисел $\{\mu, k\}$, $\mu \in \mathbb{C}^1$, $k \geq 0$ целое, для которых $\delta_\mu^k \in J$, но $\delta_\mu^{k+1} \notin J$.

Инвариантное подпространство, спектр которого состоит из одной пары (μ, k) , будем называть однотоочечным.

Двойственным объектом для инвариантного подпространства J является его аннуляторный подмодуль $J^\perp = \{f \in \mathcal{F}: \langle f, \varphi \rangle = 0, f \in J\}$.

Теорема 1. Для того чтобы инвариантное подпространство допускало спектральный синтез, необходимо и достаточно, чтобы его аннуляторный подмодуль совпадал с пересечением всех однотоочечных подмодулей, его содержащих.

* Требование $H > 0$ при $\rho=1$ можно опустить.

** Здесь и всюду в дальнейшем инвариантное относительно оператора D .

Этот результат мы получаем с помощью теоремы 3 из ⁽⁷⁵⁾, которая описывает корневой линейный оператор L_φ , определяемого на гиперплоскости $\langle f, \varphi \rangle = 0$, $\varphi \in \mathcal{F}$, равенством $L_\varphi f = Df$. При этом используется следующее утверждение.

Лемма 3. Для того чтобы инвариантное подпространство J допускало спектральный синтез, необходимо, чтобы при каждой, и достаточно, чтобы при какой-нибудь одной функции $\varphi \in J^\perp$, оно было инвариантным относительно резольвенты $R(\mu, L_\varphi) = (L_\varphi - \mu)^{-1}$.

Теорема 2. Каждое из следующих условий достаточно для того, чтобы инвариантное подпространство J допускало спектральный синтез:

- 1) аннуляторный подмодуль $J^\perp$ имеет одну образующую;
- 2) существует функция $\varphi \in J^\perp$, индикатор которой неположителен во всех точках $\theta \in [0, 2\pi]$, в которых функция $H(\theta)$ конечна.

Первое из этих условий выполняется, если J является пространством решений однородного уравнения типа свертки ⁽⁷⁶⁾. Для выполнения второго условия достаточно, чтобы подпространство $J^\perp$ содержало нетривиальную функцию нулевого типа. Нетрудно показать, что второе условие выполняется и в том случае, когда $\mathcal{F}$ является топологической алгеброй.

Теорема 3. Если функция $H(\theta)$ неограничена и такова, что длина каждого максимального интервала, на котором она принимает конечные значения, не превосходит π/ρ , то каждое инвариантное подпространство $J \subset \mathcal{E}$ допускает спектральный синтез.

Для доказательства теоремы 3 мы выбираем точку $\mu \in \mathbb{C}^1$ и функцию $\varphi \in J^\perp$ так, что $\varphi(\mu) = 1$. В условиях теоремы удастся для любых функций $\psi \in J^\perp$ и $m \in \mathcal{M}(H)$ так подобрать полиномы p, q и функцию $\omega \in \mathcal{F}$, что для $\xi = \omega(p\varphi + q\psi)$ будет $\xi \in J^\perp \cap V_m$ и $\langle R(\mu, L_\varphi)f, \psi \rangle = \langle R(\mu, L_\varphi)f, \xi \rangle$ при каждом $f \in J$. По лемме 2 отсюда следует $\langle R(\mu, L_\varphi)f, \psi \rangle = 0$. Таким образом, $R(\mu, L_\varphi)f \in J$ и требуемое утверждение получается из леммы 3.

5. В заключение отметим одну аналитическую реализацию изложенной теории.

Теорема 4. Пусть $0 < \rho \leq 1$, Ω — ρ -выпуклая область, содержащая начало, и пусть $A(\Omega)$ — пространство функций, аналитических в Ω с топологией равномерной сходимости на внутренних компактах. Для того чтобы всякое замкнутое подпространство $J \subset A(\Omega)$, инвариантное относительно оператора дифференцирования Гельфонда — Леонтьева (*), совпадало с замыканием линейной оболочки функций $E_\rho(z; 1)$, $zE_\rho(z; 1)$ и т. д., $\mu \in \mathbb{C}^1$, содержащихся в J , необходимо и достаточно, чтобы область Ω была неограниченной.

Достаточность условий теоремы получается из теоремы 3 с помощью обобщенного преобразования Бореля. Доказательство необходимости использует соответствующую конструкцию из работы ⁽⁶⁶⁾. Эта же конструкция позволяет при любом $\rho > 1$ и $0 < H(\theta) < \infty$ строить инвариантные подпространства с пустым спектром.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
24 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ L. Schwartz, Ann. Math., v. 48, 4 (1947). ² А. Ф. Леонтьев, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 29 (1965). ³ П. К. Рашевский, ДАН, т. 162, № 3 (1965). ⁴ И. Ф. Красичков, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 31 (1967); Там же, т. 32 (1968); Сиб. матем. журн., т. 9, № 1 (1968). ⁵ Н. К. Никольский, Там же, т. 9, № 1 (1968). ⁶ И. Ф. Красичков-Герновский, Матем. сб., а) т. 87 (129), № 4 (1972); б) Там же, т. 88 (130), № 1 (1972); в) Там же, т. 88 (130), № 3 (1972). ⁷ В. А. Ткаченко, ДАН, а) т. 217, № 5 (1974); б) т. 219, № 3 (1974). ⁸ Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., 1956. ⁹ М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966. ¹⁰ А. О. Гельфонд, А. Ф. Леонтьев, Матем. сб., т. 29 (71), № 3 (1951). ¹¹ L. Ehrenpreis, Fourier Analysis in Several Complex Variables, 1970. ¹² J. Wermer, Proc. Am. Math. Soc., v. 3, № 2 (1952).