

Н. С. ЧЕРНИКОВ

**ГРУППЫ С УСЛОВИЯМИ МИНИМАЛЬНОСТИ
ДЛЯ НЕДОПОЛНЯЕМЫХ АБЕЛЕВЫХ ПОДГРУПП**

(Представлено академиком В. М. Глушковым 17 III 1975)

Убывающую бесконечную цепь подгрупп группы G

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_i \supset A_{i+1} \supset \dots \supset A_\omega,$$

где A_i — член с произвольным натуральным номером и A_ω — член, являющийся пересечением всех членов A_i , назовем ω -цепью группы G , если все индексы $[A_i : A_{i+1}]$, $i < \omega$, бесконечны. Группу G назовем ω -факторизуемой группой (соответственно ωA -факторизуемой группой), если из недополняемых в ней подгрупп (соответственно из недополняемых в ней абелевых подгрупп) нельзя составить ни одной ω -цепи.

В силу этого определения, группы с условием минимальности для подгрупп (для абелевых подгрупп) и, в частности, конечные группы, следует считать ω (ωA)-факторизуемыми группами, так как они не содержат никаких бесконечных убывающих цепей подгрупп (соответственно бесконечных убывающих цепей абелевых подгрупп). В работе (1) показано, что локально-конечные группы с условием минимальности для абелевых подгрупп, являются экспериментальными группами (т. е. конечными расширениями абелевых групп с условием минимальности для подгрупп). Ввиду (2) отсюда следует, что экстремальна и всякая бинарно-конечная группа (группа, любые два элемента которой порождают конечную подгруппу), удовлетворяющая условию минимальности для абелевых подгрупп.

Естественно, что ω (ωA)-факторизуемыми группами следует считать и вполне факторизуемые группы (т. е. группы, в которых дополняемы все подгруппы). Описание вполне факторизуемых групп содержится в работе (3).

Автором получены следующие результаты.

Теорема 1. *Периодическая ωA -факторизуемая группа G , не удовлетворяющая условию минимальности для абелевых подгрупп, локально-конечная тогда и только тогда, когда она содержит неэкстремальный абелев нормальный делитель.*

Теорема 2. *Не вполне факторизуемая, неэкстремальная бинарно-конечная группа G является ωA -факторизуемой группой тогда и только тогда, когда она разложима в полупрямое произведение $G = A \lambda B$ двух своих подгрупп A и B , удовлетворяющих следующим условиям:*

1) A — бесконечный абелев нормальный делитель группы G , представимый в виде прямого произведения инвариантных в G подгрупп простых порядков,

2) $B = B_1 \times B_2$, где B_1 — конечная абелева вполне факторизуемая группа, B_2 — циклическая группа, силовские подгруппы которой имеют непростые порядки,

3) централизатор $C_G(A)$ подгруппы A в G совпадает с A ,

4) подгруппа $C_G(\{b\})$ конечна для любой отличной от единицы подгруппы $\{b\} \subset B_2$.

Ввиду результатов работы (4), из теоремы 2 вытекают два следствия.

Следствие 1. *В неэкстремальной бинарно-конечной ωA -факторизуемой группе дополняемы все бесконечные абелевы подгруппы.*

Следствие 2. Если локально-конечная группа G , удовлетворяющая условию минимальности для недополняемых абелевых подгрупп, не является ни экстремальной, ни вполне факторизуемой группой, то все ее бесконечные абелевы подгруппы дополняемы в ней, и она имеет разложение $G = A \times B$, описанное в теореме 2.

Вопрос о строении локально-конечных групп с условием минимальности для недополняемых абелевых подгрупп предложен автору С. Н. Черниковым.

Теорема 3. Бинарно-конечная группа G является ω -факторизуемой группой тогда и только тогда, когда она либо вполне факторизуема, либо экстремальна.

Следствие. В бесконечной бинарно-конечной группе G тогда и только тогда дополняема всякая бесконечная подгруппа, когда группа G либо вполне факторизуема, либо представима в виде полупрямого произведения $G = A \rtimes B$, где A — квазициклическая группа, B — конечная вполне факторизуемая группа.

При доказательстве теорем 1, 2 и 3 были существенно использованы следующие вспомогательные утверждения, установленные автором.

Лемма 1. Если абелев нормальный делитель A периодической ωA -факторизуемой группы G неэкстремален, то он разложим в прямое произведение инвариантных в G подгрупп простых порядков.

Лемма 2. Периодическая ωA -факторизуемая группа G , содержащая бесконечный экстремальный нормальный делитель N , удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп.

Лемма 3. Если локально-нормальная ωA -факторизуемая группа G неэкстремальна, то она вполне факторизуема.

Лемма 4. Если нильпотентная ωA -факторизуемая группа G периодична и неэкстремальна, то она абелева.

Лемма 5. Пусть G — бинарно-конечная ωA -факторизуемая группа. Если группа G неэкстремальна и централизатор $C_G(g)$ некоторого ее элемента g простого порядка экстремален, то она содержит неэкстремальный абелев нормальный делитель.

Лемма 6. Пусть G — бинарно-конечная ωA -факторизуемая группа. Если группа G неэкстремальна и содержит элемент g порядка p^2 , где p — простое число, то она обладает неэкстремальным абелевым нормальным делителем.

Лемма 7. Если ωA -факторизуемая неэкстремальная бинарно-конечная группа G содержит конечную силовскую p -подгруппу P (где p — простое число), индекс нормализатора которой в группе G бесконечен, то она обладает неэкстремальным абелевым нормальным делителем.

Лемма 8. Пусть G — неэкстремальная бинарно-конечная ωA -факторизуемая группа, p — минимальный простой делитель порядков ее элементов. Если все силовские подгруппы группы G бесконечны, то коммутант G' группы G не содержит элементов порядка p .

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
24 II 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. П. Шунков, Алгебра и логика, т. 9, № 2, 220 (1970). ² С. П. Струнков, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 31, 657 (1967). ³ Н. В. Баева, ДАН, т. 92, № 5, 877 (1953).
⁴ С. Н. Черников, ДАН, т. 205, № 6, 1306 (1972).