

Б. Э. ШАПИРОВСКИЙ

О π -ХАРАКТЕРЕ И π -ВЕСЕ В БИКОМПАКТАХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 13 III 1975)

Известно, что наследственно сепарабельный бикомпакт не обязан иметь счетную базу. Оказывается, однако, что счетной π -базой обладает всякий наследственно сепарабельный бикомпакт (следствие 2). Этот результат — следствие более общего: теснота всякого бикомпакта есть его наследственный π -характер (теорема 1).

П о н я т и я. Семейство $\mathcal{B}$ открытых в X множеств называется π -б а з о й множества $A \subset X$ в X ⁽⁵⁾, если для всякого открытого в X множества $U \supset A$ существует непустое $B \in \mathcal{B}$ такое, что $B \subset U$. Если, кроме того, $A \subset \bigcup \{B \in \mathcal{B}: B \subset U\}$ для всякого открытого $U \supset A$, то $\mathcal{B}$ — π -база A в X ^(7b). (Ясно, что при одноточечном $A = \{x\}$ всякая π -база точки x в X будет и π -базой x в X .) Семейство $\mathcal{B}$ называется Δ -б а з о й A в X , если $\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B}: [B] \supset A\}$ — π -база A в X . Если теперь $\mathcal{B}$ — Δ -база A в X и $[\bigcap \{U: U \in \mathcal{K}\}] \supset A$ для всякого конечного подсемейства $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}$, то $\mathcal{B}$ — δ -база A в X *. Напомним также, что семейство $\mathcal{B}$ — π -база в X , если $\mathcal{B}$ — π -база x в X для всех $x \in X$ ⁽⁴⁾.

Обозначения. Пусть $A \subset X$. Тогда $[A]_\tau = \bigcup \{[M]: A \supset M, |M| \leq \tau\}$, $t(X) = \min \{\tau: [A]_\tau = [A] \text{ для всех } A \subset X\}$ — теснота X ⁽³⁾, $\pi\chi(A, X) = \min \{|\mathcal{B}|: \mathcal{B} \text{ — } \pi\text{-база } A \text{ в } X\}$ — π -характер A в X ⁽⁵⁾. Аналогично определяются $s\pi\chi(A, X)$ — $s\pi$ -характер и $\delta\chi(A, X)$ — δ -характер A в X . Как всегда, $\sup \{\pi\chi(x, X): x \in X\} = \pi\chi(X)$ — π -характер X и $h(X)$, $\chi(X)$ и $\psi(X)$ — высота ^(2a), характер и псевдо-характер пространства X соответственно. Положим $\overline{\pi\chi}(X) = \sup \{\pi\chi(Y): Y \subset X\}$. (Ясно, что $\overline{\pi\chi}(X) = \sup \{\pi\chi(x, X): x \in X\}$, где $\pi\chi(x, X) = \sup \{\pi\chi(x, Y): x \in Y \subset X\}$). Аналогично, $\overline{s\pi\chi}(X)$ — наследственная плотность и $\overline{\pi w}(X)$ — наследственный π -вес пространства X .

Пусть теперь $\mathcal{E}$ — семейство пространств и для всякого $Y \in \mathcal{E}$ определено отображение $f_Y: X \rightarrow Y$. Тогда отображение $\Delta\{f_Y: Y \in \mathcal{E}\} = f: X \rightarrow \prod \{Y: Y \in \mathcal{E}\}$, называемое диагональным произведением семейства отображений $\{f_Y: Y \in \mathcal{E}\}$, определяется формулой $f(x) = \{f_Y(x): Y \in \mathcal{E}\}$ для всех $x \in X$. Через I (или через I_α , где α — ординал) обозначаем обычный отрезок $[0, 1]$, через $\Omega(\alpha)$ — пространство ординалов, меньших α (с порядковой топологией). Для всякого ординала α' положим также $I^{\alpha'} = \prod \{I_\alpha: \alpha < \alpha'\}$. И, наконец, скажем, что отображение $f: X \rightarrow Y$ неприводимо относительно множества $A \subset X$, если $f^*(U) \neq \Lambda$ для всякого открытого в X множества $U \supset A$. Напомним, что $f^*(U) = \{y \in Y: f^{-1}(y) \subset U\}$ ⁽⁴⁾, и отображение f называется неприводимым, если f неприводимо относительно всякой точки $x \in X$.

Все отображения далее непрерывны. Особо отметим очевидное

У т в е р ж д е н и е 1. Пусть замкнутое отображение $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$ неприводимо относительно $A \subset X$ и $\mathcal{F}$ — π -база в Y . Тогда $\mathcal{B} = f^{-1}(\mathcal{F}) = \{f^{-1}(V): V \in \mathcal{F}\}$ — π -база A в X и, следовательно, $\pi\chi(A, X) \leq \pi w(Y)$.

Предложение 1. Пусть X — бикомпакт, $x \in X$ и $\pi\chi(x, X) \geq \tau$. Тогда существует отображение $f: X \rightarrow I^\tau$ такое, что $f(X) \supseteq \Omega(\tau+1)$.

Доказательство. Пусть $f_0 = g_1: X \rightarrow I \in I_0$ и для всех $\alpha < \alpha' < \tau$ уже определены $f_\alpha: X \rightarrow I_\alpha = I$ и (при $\alpha \neq 0$) $g_\alpha = \Delta\{f_\beta: \beta < \alpha\}: X \rightarrow I^{\alpha'} = \prod \{I_\beta: \beta < \alpha\}$

* Концепция Δ -базы заимствована из ⁽⁵⁾. Если $A = \{x\}$ одноточечно, а X регулярно, то семейство $\mathcal{B}$ — δ -база в нашем смысле тогда и только тогда, когда $\{[B]: B \in \mathcal{B}\}$ — мелкая δ -система A в X в смысле ⁽⁵⁾ (см. по этому поводу ⁽¹⁰⁾).

такие, что: а) $f_\alpha(x)=1$, б) $g_\alpha f_\alpha^{-1}(0)=g_\alpha(X)$. Положим $g_{\alpha'}=\Delta\{f_\alpha: \alpha<\alpha'\}: X\rightarrow I^{\alpha'}$. Поскольку $w(I^{\alpha'})<\tau$, то по утверждению 1 существует открытое в X множество $U\Rightarrow x$ такое, что $g_{\alpha'}^*(U)=\Lambda$. Ясно, что тогда отображение $f_{\alpha'}: X\rightarrow I_{\alpha'}$, для которого $f_{\alpha'}(x)=1$ и $f_{\alpha'}(X\setminus U)=0$, отвечает (вместе с $g_{\alpha'}$) условиям а), б). Положим $f=\Delta\{f_\alpha: \alpha<\tau\}: X\rightarrow I^\tau=\prod\{I_\alpha: \alpha<\tau\}$, и для всех $\beta\leq\tau$ обозначим через e_β точку $y=\{y(\alpha): \alpha<\tau\}\in I^\tau$ такую, что $y(\alpha)=1$ при $\alpha<\beta$ и $y(\alpha)=0$ при $\beta\leq\alpha<\tau$. Очевидно, что $f(x)=\bar{1}=e_\tau$ и соответствие $\alpha\leftrightarrow e_\alpha$ устанавливает гомеоморфизм между $\Omega(\tau+1)$ и $E=\{e_\alpha: \alpha\leq\tau\}$. Остается проверить, что в силу построения и бикомпактности X множество $E\subset f(X)$.

Теорема 1. Пусть X — бикомпакт. Тогда $t(X)=\overline{\pi\chi(X)}$.

Доказательство. Очевидно, что $t(Z)\leq\pi\chi(Z)$ для всякого пространства Z . С другой стороны, если $x\in F\subset X$, F замкнуто в X и $\pi\chi(x, F)=\tau$, то в силу предложения 1 существует бикомпакт $H\subset F$ и отображение f такое, что $f(H)=\Omega(\tau+1)$. Но поскольку f факторно, то $t(H)\geq t(\Omega(\tau+1))=\tau$ ⁽³⁾ и, следовательно, $t(X)\geq t(H)\geq\tau$, откуда и получаем $t(X)\geq\sup\{\pi\chi(x, F): x\in F\subset X, F \text{ замкнуто в } X\}$.

Следствие 1. Всякий бикомпакт со счетной теснотой имеет счетную π -базу в каждой точке.

Отметим, что следствие 1 — результат, новый уже в классе секвенциальных (и даже Фреше — Урысона) бикомпактов, что еще раз подтверждает исключительную полезность предложенного А. В. Архангельским понятия тесноты.

Утверждение 2. $\pi w(X)=\pi\chi(X)\cdot s(X)$.

Из очевидного утверждения 2 и теоремы 1 непосредственно следует

Теорема 2. Пусть X — бикомпакт. Тогда $\bar{s}(X)=\overline{\pi w(X)}$.

Следствие 2. Всякое подпространство наследственно сепарабельно бикомпакта обладает счетной π -базой.

Утверждение 3. Пусть $P=\{x\in X: \pi\chi(x, X)\leq\tau\}$. Тогда $[P]_\tau=P$.

Доказательство. Если $y\in[A]\subset X$ и $\mathcal{B}_x$ — π -база x в X при $x\in A$, то, очевидно, что $\mathcal{B}=\bigcup\{\mathcal{B}_x: x\in A\}$ — π -база y в X , откуда и вытекает требуемое заключение.

Утверждение 4. Пусть $a\in A$, $z\in K$, $\psi(a, A)>\aleph_0$, $K\setminus\{z\}$ — финально компактно и $Y\subset K\times A$. Тогда, если $(\{z\}\times A\cup K\times\{a\})\subset Y$ и для всякого $e\in A$ точка $z\in[\{x\in K: (x, e)\in Y\}]$, то $Y\setminus\{(z, a)\}$ не нормально.

В справедливости утверждения 4 нетрудно убедиться, а в случае $Y=K\times A$ доказательство можно просто извлечь из ⁽¹²⁾.

Предложение 2. Пусть X — бикомпакт и $\pi\chi(x, X)>\aleph_0$ для всех $x\in X$. Тогда существует отображение $f: X\rightarrow I^{\omega_1}$, для которого $f(X)$ не наследственно нормально.

Доказательство. Существует $f_0=g_1: X\rightarrow I_0$, для которого $f_0(X)==[f_0(X)\setminus\{0\}]\ni 0$ (X бесконечно), и пусть для всех $\alpha<\alpha'<\omega_1$ уже определены отображения $f_\alpha: X\rightarrow I_\alpha=I$ и (при $\alpha\neq 0$) $g_\alpha=\Delta\{f_\beta: \beta<\alpha\}: X\rightarrow I^\alpha$ такие, что: а) $g_\alpha f_\alpha^{-1}(0)=g_\alpha(X)$; б) $[g_\alpha f_\alpha^{-1}(1)\cap P_\alpha]\ni O^\alpha=\{O^\alpha(\beta): \beta<\alpha\}$, где $O^\alpha(\beta)\ni 0$ и $P_\alpha=\{y=\{y(\beta): \beta<\alpha\}\in g_\alpha(X): y(\beta)=0 \text{ при } \beta\neq 0 \text{ и } y(0)\neq 0\}$.

Положим $g_{\alpha'}=\Delta\{f_\alpha: \alpha<\alpha'\}: X\rightarrow I^{\alpha'}=\prod\{I_\alpha: \alpha<\alpha'\}$. Тогда в силу бикомпактности X и условий а), б) $O^{\alpha'}\in[P_{\alpha'}]\subset g_{\alpha'}(X)$, и в силу совершенности $g_{\alpha'}$ существует точка $x\in g_{\alpha'}^{-1}(O^{\alpha'})$ такая, что $O^{\alpha'}\in[g_{\alpha'}(V)\cap P_{\alpha'}]$ для всякого открытого в X множества $V\ni x$. Кроме того, существует и открытое в X множество $U\ni x$, для которого $g_{\alpha'}^*(U)=\Lambda$, иначе по утверждению 1 $\pi\chi(x, X)\leq\aleph_0$. Пусть теперь $x\in V\subset[V]\subset U$. Тогда отображение $f_{\alpha'}: X\rightarrow I_{\alpha'}$, для которого $f_{\alpha'}([V])=1$ и $f_{\alpha'}(X\setminus U)=0$, отвечает (вместе с $g_{\alpha'}$) условиям а), б). Построенное таким образом отображение $f=\Delta\{f_\alpha: \alpha<\omega_1\}$ — искомое. Действительно, для всех $0<\beta\leq\omega_1$ обозначим через a_β точку $u=\{u(\alpha): 0<\alpha<\omega_1\}\in\prod\{I_\alpha: 0<\alpha<\omega_1\}$ такую, что $u(\alpha)=0$ при $\alpha\neq\beta$ и $u(\alpha)=1$ при $\alpha=\beta$. Ясно, что тогда бикомпакт $A=\{a_\beta: 0<\beta\leq\omega_1\}$ (с единственной неизолированной точкой a_{ω_1} в роли a) и компакт $K=f_0(X)$ (с 0 в роли z) отвечают условиям утверждения 4. Остается проверить, что

в силу построения и для $Y=f(X)\cap(K\times A)$ условия утверждения 4 выполняются, откуда и вытекает не наследственная нормальность $f(X)=Y$.

Из утверждения 3 и предложения 2 немедленно получаем:

Теорема 3. Пусть X — наследственно нормальный бикомпакт и $P=\{x\in X: \pi\chi(x, X)\leq \aleph_0\}$. Тогда $[P]=X$ и P — сильно счетно компактно.

Заметим, что теоремы 1–3 не поддаются усилению ввиду построенного В. В. Федорчуком ⁽¹¹⁾ наследственно сепарабельного наследственно нормального бикомпакта Φ без точек со счетного Δ -базой.

Утверждение 5⁰. Пусть $x\in G\subset X$, $\mathcal{F}$ — сл-база G в X и $\mathcal{B}$ — семейство открытых в X множеств такое, что для всякого открытого в X множества $V\exists x$ существует $B_v\in\mathcal{B}$, для которого $V\supset[B_v]\cap G\supset B_v\cap G\neq\Lambda$. Тогда $\mathcal{E}=\mathcal{B}\wedge\mathcal{F}$ — π -база x в X^* .

Доказательство. Если V — открыто в X , $x\in V$ и $H=[B_v]\cap(X\setminus V)$, то по условиям $H\cap G=\Lambda$, и, следовательно, существует $U\in\mathcal{F}$ такое, что $U\cap H=\Lambda$ и $U\cap B_v\neq\Lambda$ (последнее возможно, поскольку $\mathcal{F}$ — сл-база G в X и $B_v\cap G\neq\Lambda$). Таким образом, $V\supset U\cap B_v\in\mathcal{E}$ и, следовательно, $\mathcal{E}$ — π -база x в X .

Из утверждения 5⁰ легко получаем

Утверждение 5. Пусть $x\in G\subset X$. Тогда в каждом из случаев а), б) $\pi\chi(x, X)\leq\pi\chi(x, G)\cdot\pi\chi(G, X)$: а) X — T_3 -пространство; б) X — T_2 -пространство и G — бикомпакт.

Отметим, что теоремы 1–3 справедливы и для T_2 -пространств точечно счетного типа, поскольку благодаря утверждению 5 теперь доказаны

Теорема 1'. Пусть X — T_2 -пространство. Тогда $\overline{\pi\chi}(X)\leq h(X)t(X)$.

Теорема 3'. Пусть X — наследственно нормальное пространство. Тогда $X=\{x\in X: \pi\chi(x, X)\leq \aleph_0\cdot h(X)\}$.

Положим $\text{Ln}(\tau)=\min\{v: 2^v>\tau\}$, $\forall\pi\chi(X)=\min\{\tau: \pi\chi(x, X)<\tau \text{ для всех } x\in X\}$, $\forall\bar{c}(X)=\min\{\tau: |D|<\tau \text{ для всякого дискретного } D\subset X\}$, $\forall d(X)=\min\{\tau: |D|<\tau \text{ для всякого замкнутого дискретного } D\subset X\}$.

Утверждение 6. Пусть $w_1(X)\leq\tau$. Тогда $\forall c(X)\leq\text{Ln}(\tau)$ и, кроме того: а) если X нормально, то $\forall d(X)\leq\text{Ln}(\tau)$; б) если X наследственно нормально, то $\forall\bar{c}(X)\leq\text{Ln}(\tau)$.

Доказательство этого несложного утверждения можно найти в ^(7б). По поводу $\text{Ln}(\tau)$, $\forall c(X)$, $\forall t(X)$ и GLH: « $\text{Ln}(2^\tau)=\tau^+$ для всех τ », см. ^(7а).

Из предложения 1 нетрудно извлечь следующее обобщение теоремы 1.

Теорема 1''. Пусть X — T_2 -пространство точечно счетного типа. Тогда если $\forall t(X)\leq\tau$ и τ регулярен, то и $\forall\pi\chi(X)\leq\tau$.

Учитывая, что $c(\Omega(\tau))=\tau$, с помощью предложения 1 получаем также (в частности) новое доказательство неравенства $t(X)\leq\bar{c}(X)$ ^(2б, 7а).

Теорема 1'''. Пусть X — T_2 -пространство точечно счетного типа. Тогда $\forall t(X)\leq\forall\pi\chi(X)\leq\forall\bar{c}(X)$ и, следовательно, $t(X)\leq\bar{c}(X)$.

Теорема 4. Пусть X — наследственно нормальное пространство точечно счетного типа. Тогда $\forall t(X)\leq\forall\pi\chi(X)\leq\forall\bar{c}(X)\leq\text{Ln}(2^{c(X)})\leq 2^{c(X)}$ и в предположении GLH $t(X)=\pi\chi(X)\leq\bar{c}(X)=c(X)$.

Доказательство. В силу теоремы 3 из ^(7а) и теоремы 3 этой работы получаем $w_1(X)\leq 2^{c(X)}$. Но тогда по утверждению 6 $\forall\bar{c}(X)\leq\text{Ln}(2^{c(X)})$, откуда в силу теоремы 1''' и вытекают требуемые неравенства.

Следствие 4. Если X — наследственно нормальный бикомпакт с условием Суслина, то $\pi\chi(x, F)<\text{Ln}(c)\leq c$ для всех $F\subset X$ и $x\in F$, и $t(x)\leq\bar{c}(X)\leq\aleph_0$ в предположении LH.

Утверждение 7. Пусть X — бикомпакт, F замкнуто в X , $V=X\setminus F$ нормально и бесконечное множество $N=\{x_k: k<\omega_0\}$ дискретно и замкнуто в V . Тогда существует непустое $H\subset F$ такое, что $\delta\chi(H, X)\leq\aleph_0$ **.

* $\mathcal{A}\cap\mathcal{F}=\{B\cap U: B\in\mathcal{A}, U\in\mathcal{F}\}$ — структурное пересечение семейств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{F}$. Определение структурного пересечения (объединения) для произвольного числа семейств можно найти в ^(7в).

** Это утверждение — результат полезной для автора беседы с В. Поповым.

Лемма 1 (АМ). Пусть X — бикомпакт с условием Суслина, $\delta\chi(F, X) < \varsigma$ и $V = X \setminus F$ нормально. Тогда существует непустое $H \subset F$, для которого $\delta\chi(H, X) \leq \aleph_0$ и, следовательно, $\pi\chi(F, X) \leq \aleph_0$.

Доказательство. F замкнуто в X (см. определение δ -базы) и нигде не плотно (в противном случае доказательство тривиально). Пусть $\mathcal{B}$ — δ -база F в X , $|\mathcal{B}| < \varsigma$ и $\mathcal{F} = \{V \cap B : B \in \mathcal{B}\}$. В силу теоремы 3.4 из ⁽⁶⁾ (см. также ⁽⁷⁶⁾), теорема 1.1) существует счетное множество $S \subset V$ такое, что $S \cap U \neq \emptyset$ для всех $U \in \mathcal{F}$. Но тогда по лемме 1.1 из ⁽⁶⁾ существует замкнутое в V дискретное (бесконечное) множество $N \subset S$, откуда в силу утверждения 7 и следует требуемое заключение.

Теорема 5 (АМ). Пусть X — наследственно нормальный бикомпакт с условием Суслина. Тогда $\pi\chi(X) \leq \aleph_0$, если $s(X) < \varsigma$, то $s(X) \leq \pi w(X) \leq \aleph_0$.

Доказательство. В силу следствия 4 для всех $x \in X$ существует $\mathcal{B}_x$ — π -база x в X такая, что $|\mathcal{B}_x| < \varsigma$. Но по теореме 3.1 из ⁽⁶⁾ (см. также ⁽⁷⁶⁾), теорема 1.1) $\mathcal{B}_x = \bigcup \{\mathcal{F}_x^i : i < \omega_0\}$, где $\mathcal{F}_x^i$ — центрированное семейство для всех $i < \omega_0$. Положим $F_x^i = \bigcap \{[U] : U \in \mathcal{F}_x^i\}$, где $\mathcal{F}_x^i = \bigwedge_{\omega_0} \mathcal{F}_x^i$. Ясно, что $\{F_x^i : i < \omega_0\}$ — π -сеть (см. ⁽⁷⁸⁾) x в X и $\delta\chi(F_x^i, X) < \varsigma$ для всех $i < \omega_0$, откуда в силу леммы 1 и получаем $\pi\chi(x, X) \leq \aleph_0$. Если теперь $s(X) < \varsigma$, то и $\pi w(X) = s(X) < \varsigma$, и теорема 2.3 из ⁽⁹⁾ влечет $s(X) \leq \aleph_0$.

Следствие 5 (АМ). Сепарабельный наследственно нормальный бикомпакт имеет счетный π -вес.

Повторяя рассуждение из ⁽⁸⁾, получаем следующее

Утверждение. Пусть $\pi\chi(X) \leq \aleph_0$ и $s(X) \geq \tau^+$. Тогда существует замкнутое $F \subset X$, для которого $\pi w(F) = \tau^+$ и $s(F) \leq s(X)$.

Из последнего утверждения (при $\tau = \aleph_0$) и теоремы 5 вытекает

Теорема 6 (АМ + $\aleph_1 < \varsigma$). Пусть X — наследственно нормальный бикомпакт с условием Суслина. Тогда $\pi w(X) \leq \aleph_0$.

В силу результатов из ⁽⁶⁾ или ⁽⁷⁶⁾ теоремы 5 и 6 справедливы и для более широких классов пространств, например, для пространств полных в смысле Чеха.

Автор глубоко признателен проф. А. В. Архангельскому за внимание и поддержку.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
7 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. С. Александров, П. С. Урысон, Мемуар о компактных топологических пространствах, М., 1971. ² А. В. Архангельский, а) ДАН, т. 192, № 2 (1970); б) ДАН, т. 199, № 6 (1971). ³ А. В. Архангельский, В. И. Пономарев, ДАН, т. 182, № 5 (1968). ⁴ В. И. Пономарев, УМН, т. 24, № 4 (1966). ⁵ Б. А. Ефимов, Тр. Московск. матем. общ., т. 23, 243 (1970). ⁶ В. И. Малыгин, Б. Э. Шапировский, ДАН, т. 213, № 3 (1973). ⁷ Б. Э. Шапировский, а) ДАН, т. 202, № 4 (1972); б) ДАН, т. 207, № 4 (1972); в) ДАН, т. 218, № 1 (1974). ⁸ J. Juhasz, Math. centre tracts, v. 34 (1971). ⁹ A. Hajnal, J. Juhasz, Proc. Koninkl. Nederl. Acad., Ser. A, v. 74, № 5 (1971). ¹⁰ Б. А. Ефимов, Матем. сб., т. 96, № 4 (1975). ¹¹ В. В. Федорчук, ДАН, т. 222, № 2 (1975). ¹² M. Katětov, Fundam. Math., v. 36, 271 (1948).