

В. А. БАБЕШКО

**ФАКТОРИЗАЦИЯ ОДНОГО КЛАССА МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 8 IV 1975)

В работе ⁽¹⁾ установлено, что матрица-функция допускает факторизацию, если она принадлежит распадающейся алгебре, получающейся замыканием линейной оболочки рациональных функций, однако формул, позволяющих производить факторизацию матриц-функций, в отличие от случая функций, нет. Задача практической факторизации общих матриц-функций поставлена давно, различные ее аспекты обсуждались Ф. Д. Гаховым ⁽²⁾. Тем не менее аппарат факторизации, за исключением частных классов матриц-функций, не разработан.

Некоторые классы матриц-функций, в частности, функционально-коммутативные ^(3, 4), и матрицы с рациональными коэффициентами ⁽⁵⁾ факторизуются в конечном виде. Это обстоятельство было использовано автором ⁽⁶⁾ для приближенной факторизации относительно вещественной оси или близких контуров матриц-функций, возникающих в задачах теории упругости для изотропных сред. Характерным для этих матриц является их вырождение в функционально-коммутативные при больших аргументах. Это свойство, однако, исчезает в задачах для анизотропных сред. Факторизации матриц-функций именно этих задач посвящена настоящая работа.

Отметим, что изучаемые ниже матрицы-функции не имеют в качестве элементов однородные функции и, таким образом, существенно отличаются от изученных в ряде работ М. И. Вишиком и Г. И. Эскиным.

1. Пусть $K(u)$ — матрица с элементами $K_{mn}(u)$, $m=1, 2$; $n=1, 2$, регулярными в области, содержащей вещественную ось или, что более общее, — контур σ , близкий к ней ⁽⁷⁾; в последнем случае на вещественной оси могут быть особенности типа полюсов или точек ветвления. Считаем, что асимптотика элементов матрицы при больших $|u|$ имеет вид

$$uK_{mn}(u) = a_{mn} \operatorname{sign} u + b_{mn} + O(u^{-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0; \quad (1)$$

здесь a_{mn} , b_{mn} — произвольные комплексные числа.

Не нарушая общности, считаем, что частные индексы матрицы — нули; $\det K(u)$ и $\det \lim_{u \rightarrow \infty} uK(u)$ отличны от нуля, первый всюду на контуре σ (вещественная ось — частный его случай).

Задача состоит в представлении матрицы $K(u)$ в форме

$$K(u) = C_-(u) D_+(u) = M_+(u) N_-(u). \quad (2)$$

Матрицы D_+ , M_+ обязаны иметь элементы и определители, регулярные выше контура σ , непрерывные на нем, причем определители без нулей в этой области. То же относится к C_- , N_- в области ниже контура σ . Элементы всех матриц в своих областях регулярности должны убывать.

Именно такого рода факторизация матриц-функций позволяет получать решения ряда систем интегральных уравнений первого рода ⁽⁸⁾.

Факторизацию матрицы $K(u)$ будем осуществлять в три этапа. Заметим, что в описанном выше виде матрица $K(u)$ не принадлежит указанной распадающейся алгебре.

На первом этапе (ограничимся случаем лишь правосторонней факторизации, левосторонняя аналогична) будут построены матрицы $C_-(1, u)$, $D_+(1, u)$ с отмеченными выше свойствами регулярности так, что матрица

$$H(1, u) = C_-^{-1}(1, u) K(u) D_+^{-1}(1, u) \quad (3)$$

при $|u| \rightarrow \infty$ вырождается в единичную.

Эта матрица уже принадлежит распадающейся алгебре.

Система уравнений Винера — Хопфа, символ которой — матрица $H(1, u)$, нормально разрешима в естественных пространствах. Поэтому первый этап — этап нормализации.

На втором этапе будут построены матрицы $C_-(2, u)$, $D_+(2, u)$ так, что матрица

$$H(2, u) = C_-^{-1}(2, u) H(1, u) D_+^{-1}(2, u) \quad (4)$$

с элементами $H_{mn}(2, u)$ обладает свойствами

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^2 \int |H_{mn}(2, u) - \delta_{mn}| du < 1, \quad m=1, 2, \quad (5)$$

δ_{mn} — символ Кронекера.

Для приближенного решения интегральных уравнений достаточно построения матрицы $H_0(1, u)$ с рациональными коэффициентами такой, что элементы разности матриц по модулю достаточно малы. Матрица, получающаяся после замены $H(1, u)$ на $H_0(1, u)$, всегда факторизуется и ее называют приближенной факторизацией. Поэтому второй этап — этап приближенной факторизации; на практике им целесообразно ограничиваться.

На третьем этапе будут построены матрицы $C_-(3, u)$, $D_+(3, u)$ со свойством

$$H(2, u) = C_-(3, u) D_+(3, u). \quad (6)$$

Это этап точной факторизации. В терминах теории групп он изложен в (1), здесь применен к конкретному случаю.

В принятых обозначениях матрицы $C_-(u)$, $D_+(u)$ получаются в форме

$$C_-(u) = \prod_{k=1}^3 C_-(k, u), \quad D_+(u) = \prod_{k=1}^3 D_+(4-k, u); \quad (7)$$

в случае приближенной факторизации надо брать

$$C_-(u) \approx \prod_{k=1}^2 C_-(k, u), \quad D_+(u) \approx \prod_{k=1}^2 D_+(3-k, u).$$

2. Элементы матриц $C_-(1, u)$, $D_+(1, u)$ отыскиваем в виде

$$c_{mn}(u) = L_{mn}(A + iu)^{-0,5 - \nu_{mn}}, \quad d_{mn}(u) = N_{mn}(A - iu)^{-0,5 + \mu_{mn}}, \quad A > 0. \quad (8)$$

Для определения постоянных L_{mn} , N_{mn} , ν_{mn} , μ_{mn} потребуем выполненные при $|u| \rightarrow \infty$ равенства

$$uK(u) = uC_-(1, u) D_+(1, u). \quad (9)$$

Из последнего соотношения определяются постоянные, которые принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} \nu_{11} = \nu_{21} = \mu_{11} = \mu_{12} = \nu_1, \quad \nu_{12} = \nu_{22} = \mu_{21} = \mu_{22} = \nu_2; \\ L_{11} = C^{-1}x_3; \quad L_{12} = D^{-1}x_4; \quad L_{21} = C^{-1}x_7; \quad L_{22} = D^{-1}x_8; \end{aligned} \quad (10)$$

$$N_{11} = Cx_1x_3^{-1}; \quad N_{12} = C; \quad N_{21} = Dx_2x_4^{-1}; \quad N_{22} = D; \quad \lambda_k = \frac{\sin \pi \nu_k}{\Delta},$$

$$\mu_k = \frac{\cos \pi \nu_k}{\Delta}, \quad \Delta = \sin \pi (\nu_2 - \nu_1),$$

$$\begin{aligned}x_1 &= a_{11}\lambda_2 + ib_{11}\mu_2; & x_2 &= -a_{11}\lambda_1 - ib_{11}\mu_1; \\x_3 &= a_{12}\lambda_2 + ib_{12}\mu_2; & x_4 &= -a_{12}\lambda_1 - ib_{12}\mu_1; \\x_5 &= a_{21}\lambda_2 + ib_{21}\mu_2; & x_6 &= -a_{21}\lambda_1 - ib_{21}\mu_1; \\x_7 &= a_{22}\lambda_2 + ib_{22}\mu_2; & x_8 &= -a_{22}\lambda_1 - ib_{22}\mu_1.\end{aligned}$$

C, D — произвольные, отличные от нуля числа, v_k — корни уравнения

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \operatorname{tg}^2 \pi v_k + i(a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12}) \operatorname{tg} \pi v_k + b_{12}b_{21} - b_{11}b_{22} = 0. \quad (11)$$

При определении v_k берется главное значение арктангенса. Опуская анализ всевозможных случаев, отметим, что в известных задачах теории упругости и гидродинамики $|\operatorname{Re} v_k| < 0,5$. Определители матриц представимы в форме

$$\det C_- = (A + iu)^{-1-v_1-v_2} (x_4 x_7 - x_3 x_8) D^{-1} C^{-1}, \quad (12)$$

$$\det D_+ = (A - iu)^{-1+v_1+v_2} (x_2 x_4^{-1} - x_1 x_3^{-1}) DC.$$

С учетом свойств матрицы $K(u)$ доказывается, что определители отличны от нуля, если A достаточно велико.

Несложный анализ позволяет установить, что при $|u| \rightarrow \infty$ на вещественной оси матрица $H(1, u)$ стремится к единичной со скоростью $O(u^{-\delta})$, где $\delta = \min(\epsilon, 1)$. Постоянные A, C, D можно зафиксировать.

З а м е ч а н и е. Изложенная схема нормализации матрицы не единственна. Другой подход, основанный на использовании матричных пучков будет изложен применительно к матрицам-функциям порядка N в ближайшей публикации автора.

3. На втором этапе, учитывая, что элементы матрицы $H(1, u)$ непрерывны на контуре σ и имеют одинаковые пределы на обоих концах, приближим их рациональными функциями. Как отмечалось выше, матрица с рациональными элементами факторизуется в конечном виде, и пусть после правосторонней факторизации она имеет вид

$$H_0(1, u) = C_-(2, u) D_+(2, u). \quad (13)$$

Примем теперь во внимание, что матрица $H(1, u)$ с аналитическими коэффициентами принадлежит указанной вначале распадающейся алгебре, а потому относительно контура σ допускает каноническую факторизацию⁽⁴⁾. Последнее означает, что полученные после факторизации матрицы, регулярные в своих областях, имеют ограниченные элементы, и этим свойством обладают их обратные. Перечисленное относится и к матрице $H_0(1, u)$. Поскольку элементы матриц, получающихся в результате факторизации матрицы $H(1, u)$, приближаются рациональными функциями (свойство распадающейся алгебры), то, приближая на контуре σ матрицы H и H_0 , тем самым приближаем матрицы их канонических факторизаций. Приближение элементов матрицы $H(1, u)$ рациональными функциями можно производить, например, используя полиномы Бернштейна [6].

Изложенное выше дает основание утверждать, что если только имеет место равенство

$$H_0(1, u) = C_-(2, u) D_+(2, u) = H(1, u) + \epsilon(u), \quad (14)$$

причем у матрицы $\epsilon(u)$ элементы на контуре σ можно сделать по модулю сколь угодно малыми за счет приближения, то найдутся матрицы $C_-(2, u)$, $D_+(2, u)$, что малыми будут и элементы матрицы

$$C_-^{-1}(2, u) \epsilon(u) D_+^{-1}(2, u). \quad (15)$$

Если скоро это так, то осуществимо неравенство (5). Несобственные интегралы сходятся, поскольку порядок подынтегральных функций на бесконечности ≤ -1 .

4. Для факторизации матрицы $H(2, u)$ рассмотрим две системы матричных уравнений на полуоси вида

$$f_{\pm}(x) + \int_{a_{\pm}}^{b_{\pm}} h(x-\xi) f_{\pm}(\xi) d\xi = g_{\pm}(x), \quad a_{\pm} \leq x \leq b_{\pm}; \quad (16)$$

здесь $h(x)$ — матрица с элементами

$$h_{mn}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} [H_{mn}(2, u) - \delta_{mn}] e^{-iux} du, \quad (17)$$

$f_{\pm}$ — неизвестные матрицы, $g_{\pm}$ — диагональная матрица с элементами $e^{\pm i x}$: $a_{+}=0$, $b_{+}=\infty$, $a_{-}=-\infty$, $b_{-}=0$. В системе (16) всюду берется либо верхний, либо нижний знаки; для правосторонней факторизации необходим верхний знак.

Применив к уравнению (16) обычную технику метода Винера — Хопфа с учетом обозначения (6), получаем с точностью до множителя — постоянной матрицы — следующее значение $D_{+}(3, u)$:

$$D_{+}(3, u) = (u+i)^{-1} F_{+}^{-1}(u); \quad (18)$$

здесь F_{+} — матрица, элементами которой являются преобразования Фурье элементов матрицы f_{+} . Для определения элементов матрицы f_{+} заметим, что в силу (5) систему (16) можно решать методом последовательных приближений в пространстве ограниченных функций. Ее решение записывается рядом Неймана. Матрица $C_{-}(3, u)$ находится из соотношения (6).

5. В качестве примера изучим матрицы $C_{-}(1, u)$, $D_{+}(1, u)$ в различных случаях, ибо именно их построение позволяет доводить задачу факторизации до конца. Поведение их элементов на бесконечности сохраняется и у матриц $C_{-}(u)$, $D_{+}(u)$, а последние, как известно, определяют особенности у решений систем интегральных уравнений.

1°. Штамп жестко сцеплен с изотропным упругим слоем, $a_{12}=a_{21}=b_{mn}=0$, $a_{11}=a_{22}=1$, $b_{12}=-b_{21}=i \cdot 0,5(1-2\nu)(1-\nu)^{-1} \equiv \varepsilon$, $0 < \nu < 1$, $\nu_k = \pm i\pi^{-1} \operatorname{arctg} \varepsilon$.

2°. Вибрация штампа на вязкой жидкости, $a_{mn}=1$, $a_{12}=a_{21}=b_{mn}=0$, $\nu_k=0$.

3°. Полосовой штамп на ортотропном слое, $a_{jk}=\lambda_{jk}$, $b_{12}=-b_{21}=i\mu$, $\mu > 0$, $a_{12}=a_{21}=b_{mn}=0$, $\nu_k = \pm i\pi^{-1} \operatorname{arctg} \mu/\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$.

Заметим, что особенности напряжений на краю штампа в этих задачах после нахождения ν_k описываются функцией

$$q(x) \sim B \operatorname{Re} x^{-0,5+\nu_k}.$$

Метод, изложенный для факторизации матриц-функций второго порядка, обобщается на случай матриц порядка N с указанной асимптотикой элементов.

Автор благодарит чл.-корр. АН СССР И. И. Воровича за внимание к работе и обсуждение результатов.

Научно-исследовательский институт
механики и прикладной математики
Ростовского государственного университета

Поступило
24 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, Уравнения свертки и проекционные методы их решения, «Наука», 1971. ² Ф. Д. Гахов, УМН, т. 7, 4(50) (1952). ³ В. В. Морозов, Уч. зап. Казанск. универ., т. 112, кн. 9 (1952). ⁴ Г. Н. Чебогарев, Там же, т. 116, кн. 4 (1956). ⁵ Н. П. Векуа, Системы сингулярных интегральных уравнений, «Наука», 1970. ⁶ В. А. Бабешко, ДАН, т. 220, № 6 (1975). ⁷ В. А. Бабешко, ДАН, т. 210, № 6 (1973).