

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Академик А. А. ВОРОНОВ

**О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ
АМПЛИТУДНО-ИМПУЛЬСНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ,
БЛИЗКИХ К НЕПРЕРЫВНЫМ**

Рассматривается схема амплитудно-импульсной системы (а.и.с.) (рис. 1) с импульсным элементом I , преобразующим непрерывное ограниченное константой воздействие $u(t)$ в последовательность η_T импульсов типа дельта-функций

$$\eta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} T u(t) \delta(t - nT), \quad (1)$$

где T — период повторения импульсов, воздействующую на линейную непрерывную часть системы 2 с передаточной функцией $W(s)$. Передаточная функция формирователя импульсов $W_\Phi(s)$ или учитывается в функции $W(s)$ или, если T достаточно мало и импульсная система близка к непрерывной, заменяется ее пределом, для многих типов формирователей равным

$$\lim_{T \rightarrow 0} W_\Phi(s) = k_n T.$$

Множитель T учитывается в (1), коэффициент k_n — в $W(s)$.

Как известно ⁽¹⁾, непрерывное преобразование Лапласа для $\eta_T(t)$ совпадает с дискретным преобразованием для $u(t)$

$$L\{\eta_T(t)\} = T \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} u(t) \delta(t - n) \exp(-st) dt = T \sum_{n=0}^{\infty} u[nT] \exp(-snT) = TU^*(s).$$

Пусть функция

$$W(s) = \frac{P(s)}{Q(s)},$$

где P и Q — полиномы степеней m и l соответственно, $m < l$.

Изображение Лапласа для выходной величины $x^*(t)$ в импульсной системе

$$L\{x^*(t)\} = TU^*(s) W(s).$$

При воздействии единичной ступенчатой функции $u(t) = 1(t)$, $TU^* = T[1 - \exp(-snt)]$ и при нулевых начальных условиях $x^*(t)$ равна переходной функции

$$x^*(t) = h^*(t) = \frac{T}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{P(s) \exp(st) ds}{Q(s) [1 - \exp(-sT)]}. \quad (2)$$

Учитывая, что множество полюсов подынтегральной функции, если линейная часть устойчива, состоит из полюсов $W(s)$ и корней $1 - \exp(-sT)$, равных

$$s_r = j \frac{2\pi r}{T} = jr\omega_T, \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

и принимая во внимание, что

$$T \left[\frac{\partial}{\partial s} (1 - \exp(-sT)) \right]_{s=s_r} = 1,$$

получим из (2)

$$h^*(t) = \left[\frac{P(0)}{Q(0)} + T \sum_{v=1}^l \frac{P(s_v) \exp s_v t}{(1 - \exp(-s_v T)) Q'(s_v)} \right] + \\ + 2 \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq 0}}^{\infty} |W(jr\omega_r)| \cos(r\omega_r t + \theta_r) = \bar{h}^*(t) + \bar{h}^*(t).$$

Решение представлено в удобной для использования форме: оно разложено на среднюю основную составляющую $\bar{h}^*(t)$ (выражение в квадратных скобках) и на периодическую составляющую, выраженную рядом

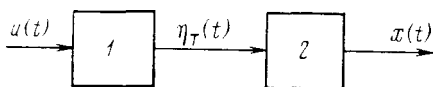


Рис. 1

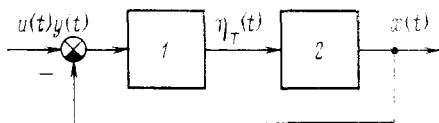


Рис. 2

Фурье. При этом амплитуды и фазы гармоник легко находятся из частотной характеристики линейной части $W(j\omega)$ и сразу выясняется, сколькими гармониками можно ограничиться при приближенном вычислении.

При достаточно малых T вычисление средней составляющей можно упростить, исключив импульсный элемент и приложив $u(t)$ непосредственно ко входу непрерывной части. Изображение $x(t)$ в такой непрерывной системе

$$L\{x(t)\} = U(s) W(s) = \frac{P(s)}{sQ(s)}$$

при $u(t) = 1[t]$, $U(s) = 1/s$. Если все полюсы простые и расположены в левой полуплоскости, то

$$x(t) = h(t) = \frac{P(0)}{Q(0)} + \sum_{v=1}^l \frac{P(s_v) \exp s_v t}{s_v Q'(s_v)}. \quad (4)$$

Составляющая $\bar{h}^*(t)$ сходна с $h(t)$ и стремится к ней при $T \rightarrow 0$. Разность между ними

$$\Delta h = \bar{h}^*(t) - h(t) = \sum_{v=1}^l \frac{P(s_v) \exp s_v t}{s_v Q'(s_v)} \{T s_v [1 - \exp(-s_v T)]^{-1} - 1\}$$

Выражение в фигурных скобках равно относительной ошибке в каждом из слагаемых переходной функции при замене точного решения приближенным. Если допустимая относительная погрешность ε_m не превышает 0,1, то с ошибкой, не превышающей 0,0033, оценку допустимых значений T можно получить из соотношений

$$\frac{\Delta h_v}{h_v} = T s_v [1 - \exp(-s_v T)]^{-1} - 1 \approx \frac{s_v T}{2} \leq \varepsilon_m,$$

$$T \leq 2\varepsilon_m |s_v|_{\max},$$

где $|s_v|_{\max}$ — наибольший из модулей корней s_v .

При воздействии ступенчатой функции на замкнутую систему (рис. 2), если все полюсы функции $W(s)/(1+W(s))$ простые, расположенные в левой полуплоскости, основная составляющая $\tilde{h}^*(t)$ представляет сумму экспонент. Поэтому рассмотрим воздействие вида

$$u(t) = \sum_{k=1}^v A_k \exp(-\alpha_k t), \quad U(s) = \sum_{k=1}^v A_k (s + \alpha_k)^{-1},$$

$$TU^*(s) = \sum_{k=1}^v TA_k [1 - \exp(-s - \alpha_k)T]^{-1}.$$

Тогда в разомкнутой системе

$$\begin{aligned} x^*(t) = & \sum_{k=1}^v \frac{A_k P(-\alpha_k) \exp(-\alpha_k t)}{Q(-\alpha_k)} + \sum_{k=1}^v A_k \sum_{v=1}^l \frac{P(s_v) \exp s_v t}{Q'(s_v) [1 - \exp(-(s_v + \alpha_k)T)]} + \\ & + \sum_{k=1}^v A_k \sum_{\substack{r=-\infty \\ r \neq 0}}^{\infty} \{W(-\alpha_k + jr\omega_T) \exp(-\alpha_k + jr\omega_T t) + \\ & + W(-\alpha_k - jr\omega_T) \exp(-\alpha_k - jr\omega_T t)\}. \end{aligned}$$

При замене $\tilde{x}^*$ на x относительная ошибка теперь возрастает в каждом слагаемом до величины $\cong 1/2(s_v + \alpha_k)T$.

При малых α_k , соответствующих медленному изменению воздействия по сравнению с частотой импульсов, расчет колебательных составляющих упрощается. Пусть $|\alpha_k| \ll \omega_T T$. Тогда

$$W(-\alpha_k \pm jr\omega_T) \cong W(jr\omega_T),$$

$$\tilde{x}^*(t) \cong \sum_{k=1}^v A_k \exp(-\alpha_k t) 2 \sum_{r=1}^{\infty} |W(jr\omega_T)| \cos(r\omega_T t + \theta_r) = u(t) \tilde{h}^*(t). \quad (5)$$

Уравнения замкнутой системы

$$\begin{aligned} X(s) &= TY^*(s)W(s), \\ Y(s) &= U(s) - X(s). \end{aligned}$$

Для приближенного нахождения основной составляющей $x^*(t)$ делаем в этих уравнениях замену $TY^*(s) = Y(s)$. Тогда

$$x^*(t) \cong \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{W(s)U(s)\exp st}{1+W(s)} ds.$$

Для вычисления колебательной составляющей в замкнутой системе воспользуемся по аналогии с (5) зависимостью

$$\tilde{x}^*(t) = v(t)h^*(t).$$

Воздействие на импульсный элемент складывается из мгновенных значений в моменты съема nT , $n=0, 1, \dots$, величин $-u[nT]$ и взятых с обратным знаком, поскольку они передаются по каналу обратной связи — основной $-\tilde{x}^*(nT)$ и периодической $-\tilde{x}^*(nT)$ составляющих. Последняя, если можно ограничиться только одной основной гармоникой, равна

$$-\tilde{x}^*(nT) = -B \cos(\omega_T nT + \theta_1) = -B \cos \theta_1.$$

Неизвестная постоянная B находится из уравнения замкнутой цепи

$$B=2\{u[nT]-\bar{x}^*(nT)-B\cos\theta_i\}|W(j\omega_T)|,$$

откуда амплитуда первой гармоники

$$B=\frac{2\{u[nT]-\bar{x}^*[nT]\}|W(j\omega_T)|}{1+2|W(j\omega_T)|\cos\theta_i}.$$

Для оценки значений α_k , при которых $\exp(-\alpha_k t)$ можно считать изменяющейся медленно, воспользуемся следующими соотношениями. Пусть

$$W(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{b_0\prod_{v=1}^m(s-s_v)}{a_0\prod_{v=m+1}^{m+n}(s-s_v)}$$

и

$$\tau=\max_{v=1,\dots,n+m}\left\{\frac{|\operatorname{Re}s_v|}{|jr\omega_T-s_v|}\right\}=\frac{|\operatorname{Re}s_{v_0}|}{|jr\omega_T-s_{v_0}|}\neq 0.$$

$$\gamma=\min_{v=1,\dots,n+m}|\operatorname{Re}s_v|\neq 0.$$

Если выполнены неравенства

$$0<\alpha_k\leqslant\frac{\varepsilon}{(n+m)\tau},\quad |\alpha_k|<0,1\gamma,$$

то

$$\frac{|W(-\alpha_k+jr\omega_T)|}{|W(jr\omega_T)|}=1+\delta,\quad |\delta|\leqslant\varepsilon.$$

Институт автоматики и процессов управления
Дальневосточного научного центра
Академии наук СССР
Владивосток

Поступило
24 IV 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Я. З. Цыпкин, Теория линейных импульсных систем, М., 1963. ² E. Jury, Theorie and Application of the z-transform Method, N. Y., 1964.