

УДК 519.214

МАТЕМАТИКА

В. Ф. ГАПОШКИН

КРИТЕРИИ УСИЛЕННОГО ЗАКОНА БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ КЛАССОВ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ И ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 III 1975)

1. Пусть $\{\xi_k\}$ — стационарная (в широком смысле) последовательность случайных величин на некотором вероятностном пространстве (Ω, A, P) , $\xi_k \in L^2(\Omega)$; не ограничивая общности, далее будем считать, что

$$M\xi_k=0, \quad D\xi_k=1, \quad k=0, \pm 1, \dots \quad (1)$$

Обозначим корреляционную функцию процесса

$$R_1(n)=M(\xi_k \xi_{k+n}) \quad \forall k, n \quad (2)$$

и введем также

$$R_2(n)=M \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \right|^2. \quad (3)$$

Очевидно, что условие $\lim_{n \rightarrow \infty} R_2(n)=0$ означает сходимость к нулю в среднем квадратическом средних

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad (4)$$

т. е. закон больших чисел «в среднем квадратическом». Известно также, что ни это условие, ни более сильное условие $\lim_{n \rightarrow \infty} R_1(n)=0$ недостаточно,

вообще говоря, для сходимости средних σ_n с вероятностью 1 (п.н.), т. е. для усиленного закона больших чисел (у.з.б.ч.), и что критерии у.з.б.ч. для индивидуальных стационарных последовательностей $\{\xi_k\}$ не могут быть сформулированы в терминах $R_i(n)$, $i=1, 2$ (1-4).

Основным результатом данной работы является специальное представление (6) средних σ_n любой стационарной последовательности через «остаток» ортогонального ряда, определяемого по стохастической спектральной мере $Z(d\lambda)$ данной последовательности $\{\xi_k\}$. Это позволяет с помощью критериев сходимости ортогональных рядов установить критерии у.з.б.ч., выраженные через спектральную функцию $F(d\lambda)$ или корреляционные функции $R_1(n)$, $R_2(n)$ и носящие в известном смысле окончательный характер (в классах).

Аналогичные результаты справедливы и для стационарных случайных процессов $\xi(t)$, $t \in R^1$, и однородных случайных полей $\xi(s)$, $s \in R^m$, при любом $m \geq 1$.

2. Специальное представление средних σ_n . Обозначим через $F(d\lambda)$ спектральную меру, отвечающую последовательности $\{\xi_k\}$,

а через $Z(d\lambda)$ — ее стохастическую спектральную меру (с ортогональными приращениями), так что

$$\xi_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikh} Z(d\lambda), \quad R_1(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikh} F(d\lambda) \quad \forall k. \quad (5)$$

Теорема 1. Если $\{\xi_k\}$ — произвольная стационарная последовательность и σ_k — ее средние арифметические, то существуют такие случайные величины ψ_h , что:

$$1) \sigma_k \stackrel{L_2}{=} \int_{|\lambda| \leq 2^{-n}} Z(d\lambda) + \psi_k \quad \text{при} \quad 2^n \leq k < 2^{n+1}, \quad n=0, 1, \dots, \quad (6)$$

$$2) \lim_{h \rightarrow \infty} \psi_h = 0 \text{ п.н. и в } L_2.$$

Отсюда непосредственно вытекают необходимые и достаточные условия для у.з.б.ч.

Теорема 2. 1) Для стационарной последовательности $\{\xi_k\}$ средние σ_n сходятся п.н. при $n \rightarrow \infty$ к некоторой случайной величине η тогда и только тогда, когда существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|\lambda| \leq 2^{-n}} Z(d\lambda) = \eta \text{ п.н.}, \quad \eta = Z(\{0\}).$$

2) Для того чтобы для $\{\xi_k\}$ был справедлив у.з.б.ч., необходимо и достаточно, чтобы $F(\{0\}) = 0$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{0 < |\lambda| \leq 2^{-n}} Z(d\lambda) = 0 \text{ п.н.} \quad (7)$$

3) Условие (7) эквивалентно сходимости п.н. ортогонального ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k Z_k, \quad (8)$$

где

$$a_k = \left(\int_{2^{-k-1} < |\lambda| \leq 2^{-k}} F(d\lambda) \right)^{1/2}, \quad Z_k = a_k^{-1} \int_{2^{-k-1} < |\lambda| \leq 2^{-k}} Z(d\lambda) \quad (9)$$

(если $a_k = 0$, полагаем $a_k Z_k = 0$).

Заметим, что $\{Z_k\}$ — ортонормированная система в $L_2(\Omega)$, $\sum a_k^2 < \infty$.

Следствие 1. Если стохастическая спектральная мера имеет независимые приращения и $F(\{0\}) = 0$, то для $\{\xi_k\}$ справедлив у.з.б.ч.

Для доказательства достаточно к ряду (8) применить теорему Колмогорова.

3. Критерии у.з.б.ч.

Теорема 3. А) Если $F(\{0\}) = 0$ и

$$\int_{0 < |\lambda| \leq \lambda_0} \left(\lg \lg \frac{1}{|\lambda|} \right)^2 F(d\lambda) < \infty \quad \forall \lambda_0 > 0,$$

то для $\{\xi_k\}$ справедлив у.з.б.ч.

Б) Если

$$\omega(u) \uparrow \text{ на } (0, \infty), \quad \omega(u) = o(\lg \lg u)^2 \text{ при } u \rightarrow \infty,$$

то существует стационарная последовательность $\{\xi_k\}$, для которой

$$F(\{0\}) = 0, \quad \int_{0 < |\lambda| \leq \pi} \omega\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) F(d\lambda) < \infty,$$

но у.з.б.ч. не справедлив, т. е. средние σ_n расходятся п.н.

Достаточно применить теорему Меньшова — Радемахера (в случае А) и известный контрпример Меньшова (в случае Б).

Следствие 2. Если мера $F(d\lambda)$ абсолютно непрерывна, $F(d\lambda) = f(\lambda)d\lambda$ и

$$f(\lambda) = O\left(|\lambda| \lg \frac{1}{|\lambda|} \left(\lg \lg \frac{1}{|\lambda|}\right)^{3+\varepsilon}\right)^{-1}, \quad |\lambda| \rightarrow 0,$$

то при $\varepsilon > 0$ у.з.б.ч. справедлив, а при $\varepsilon = 0$, вообще говоря, нет.

Теорема 3 и следствие 2 дают, таким образом, неусиливаемые условия для у.з.б.ч. в классе всех стационарных последовательностей $\{\xi_k\}$, имеющих заданное ограничение на поведение спектральной меры или спектральной плотности в нуле. Критерий для классов $\{\xi_k\}$, имеющих заданную скорость убывания корреляционной функции $R_1(n)$ или $R_2(n)$, содержится в следующем утверждении.

Теорема 4. Если сходится ряд

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{R_i(k)}{k \lg k} \lg \lg k, \quad i=1 \text{ или } 2, \quad (10)$$

то для $\{\xi_k\}$ справедлив у.з.б.ч.

Условие (10) неусиливаемо в следующем смысле.

Теорема 5. Пусть для функции $\Phi(k) > 0$ выполнены условия «регулярного убывания»:

$$k\Delta\Phi(k) \downarrow, \quad k\Delta\Phi(k) \leq C\Phi(k), \quad k^{2-\varepsilon}\Delta\Phi(k) \uparrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (11)$$

и пусть

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\Phi(k)}{k \lg k} \lg \lg k = \infty.$$

Тогда существует стационарная последовательность $\{\xi_k\}$, для которой средние σ_n расходятся п.н., хотя $R_i(k) = O(\Phi(k))$, $i=1, 2$.

Следствие 3. Если корреляционная функция для $\{\xi_k\}$ убывает со скоростью

$$R_i(n) = O(\lg \lg n)^{-2-\varepsilon}, \quad i=1 \text{ или } 2, \quad (12)$$

то при $\varepsilon > 0$ у.з.б.ч. справедлив, а при $\varepsilon = 0$, вообще говоря, нет.

Контрпример для $\varepsilon = 0$ был получен ранее в работах (2, 3).

4. Усиленный закон больших чисел для однородных случайных полей. Пусть $\xi(s)$ — однородное случайное поле в R^m с корреляционной функцией $K(u) = K(u_1, \dots, u_m)$, σ_ρ — его средние по шару V_ρ радиуса ρ (в частности, при $m=1$ $\xi(s)$ — стационарный процесс в R^1). Используем снова обозначения $Z(d\lambda)$, $F(d\lambda)$; $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $|\lambda| = (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_m^2)^{1/2}$ для спектральных мер данного поля и

$$R_2(\rho) = M|\sigma_\rho|^2, \quad R_1^*(\rho) = \frac{1}{|V_\rho|} \int_{V_\rho} K(u) du.$$

Теорема 1'. Для любого однородного случайного поля $\xi(s)$ в R^m справедливо следующее представление для средних σ_ρ :

$$\sigma_\rho \stackrel{L_2}{=} \int_{|\lambda| \leq 2^{-n}} Z(d\lambda) + \psi_\rho, \quad \text{если } 2^n \leq \rho < 2^{n+1}, \quad n=1, 2, \dots,$$

где $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \psi_\rho = 0$ п.н. и в $L_2(\Omega)$.

С помощью этого представления на однородные случайные поля в R^m распространяются все критерии теорем 2–5, с заменой сумм на интегралы.

С л е д с т в и е 4. *Если*

$$R_1^*(\rho) = O(\lg \lg \rho)^{-2-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad \rho \rightarrow \infty,$$

то для однородного случайного поля $\xi(s)$ справедлив у.з.б.ч.

Следствие 4 обобщает результат работы ⁽⁵⁾, где требуется скорость убывания порядка $R_1^*(\rho) = O(\lg \rho)^{-3-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

5. Квазистационарные последовательности. Отметим, что наличие спектрального разложения существенно для получения приведенных выше результатов. Оказывается, что если рассматривать квазистационарные последовательности $\{\xi_k\}$, заданные ограничениями типа

$$M\xi_k = 0, \quad D\xi_k = 1, \quad |M\xi_k \overline{\xi_{k+n}}| \leq C\Phi_1(n) \quad \forall k, n$$

(или, по другому определению, удовлетворяющие условию

$$M \left| n^{-1} \sum_{k=m+1}^{m+n} \xi_k \right|^2 \leq C\Phi_2(n) \quad \forall m, n,$$

то критерий у.з.б.ч. существенно отличается от стационарного случая.

Т е о р е м а 6. А) *Если сходится ряд*

$$\sum \frac{\Phi_i(n)}{n}, \quad \Phi_i(n) \downarrow 0, \quad i=1, 2,$$

то справедлив у.з.б.ч. для средних $\sigma_n = n^{-1} \sum_{k=1}^n \xi_k$ (см. ⁽⁶⁾).

Б) *Если $\Phi(n) \downarrow$ и ряд $\sum \frac{\Phi(n)}{n}$ расходится, то существует квазистационарная последовательность ξ_k , для которой $\Phi_i(n) = O(\Phi(n))$, $i=1, 2$, но средние σ_n расходятся п.н.*

Определения и результаты этого параграфа могут быть распространены и на однородные случайные поля.

Поступило
1 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ A. Blanc-Lapierre, A. Tortrat, C. R., 267 A, 740 (1968). ² В. Ф. Гапошкин, Теория вероятностей и ее применения, т. 18, № 2, 388 (1973). ³ В. Ф. Гапошкин, Тр. Московск. ин-та радиотехники, электроники и автоматики, в. 67, 95 (1973). ⁴ И. Н. Вербицкая, Теория вероятностей и ее применения, т. 11, 4, 715 (1966). ⁵ В. В. Юринский, Матем. заметки, т. 16, 1, 141 (1974). ⁶ I. Gal, J. Koksma, Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet. v. 53, 5 (1950).