

Э. И. ГЕГЕЛЬ, Г. С. ЛАРИОНОВ

# МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО СООТВЕТСТВИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 3 III 1975)

Различные задачи динамики линейной теории вязкоупругости приводятся к системам интегродифференциальных уравнений вида <sup>(1-4)</sup>

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon \int_0^t K(t-s)x(s)ds + f(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где  $A$  — постоянная матрица;  $K(t)$  — матричная функция, непрерывная при  $t \geq 0$ ;  $f(t)$  — вектор-функция, непрерывная при  $t \geq 0$ , причем  $\|f(t)\| \leq b$ ;  $x_0$  — заданный вектор;  $\varepsilon > 0$  — параметр.

Известно <sup>(4)</sup>, что общее решение системы (1) записывается в форме

$$x(t) = Z(t)x_0 + \int_0^t Z(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad (2)$$

где фундаментальная матрица  $Z(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{Z}(t) = AZ(t) + \varepsilon \int_0^t K(s)Z(t-s)ds, \quad Z(0) = I. \quad (3)$$

Следовательно, отыскание общего решения (2) сводится к нахождению матрицы  $Z(t)$ . В общем случае это представляет собой сложную задачу. В частных случаях, например, когда ядро  $K(t)$  представляется экспоненциальной функцией, точное решение этой задачи изложено в монографии <sup>(4)</sup>.

В работе предлагается приближенный метод построения фундаментальной матрицы  $Z(t)$ , суть которого заключается в следующем. Пусть  $X(t)$  — фундаментальная матрица, нормированная при  $t=0$ , системы  $\dot{x} = Ax$ . Запишем уравнение (3) в интегральной форме:

$$Z(t) = X(t) + \varepsilon \int_0^t X(t-\tau)d\tau \int_0^\tau K(s)Z(\tau-s)ds \quad (4)$$

и подставим (4) в подынтегральное выражение уравнения (3).

Если изменить три раза порядок интегрирования и учесть (4), то уравнение (3) приводится к виду

$$\dot{Z}(t) = BZ(t) - \varepsilon F(t) - \varepsilon^2 \int_0^t H(s)Z(t-\rho)ds, \quad Z(0) = I; \quad (5)$$

здесь

$$B = A + \varepsilon \int_0^\infty K(s)X(-s)ds, \quad F(t) = \int_0^\infty K(s)X(t-s)ds,$$

$$H(s) = \int_0^s d\tau \int_0^\infty K(s-\tau+\theta)X(-\theta)K(\tau)d\theta,$$

причем предполагается, что матрица  $B$  существует.

Уравнению (5) в первом приближении поставим в соответствие неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\dot{Y}_1(t) = BY_1(t) - \varepsilon F(t), \quad Y_1(0) = I, \quad (6)$$

решение которого  $Y_1(t)$  будем называть первым приближением матрицы  $Z(t)$ .

Для построения второго приближения в (5) произведем замену  $Z(t) = Y_1(t) + V(t)$ . Относительно новой переменной  $V(t)$  находим уравнение

$$\dot{V}(t) = BV(t) - \varepsilon^2 \int_0^t H(s) [Y_1(t-s) + V(t-s)] ds, \quad V(0) = 0. \quad (7)$$

Уравнению (7) поставим в соответствие неоднородное дифференциальное уравнение

$$\dot{Y}_2(t) = BY_2(t) - \varepsilon^2 \int_0^t H(s) Y_1(t-s) ds, \quad Y_2(0) = 0.$$

Матрицу  $V_2(t) = Y_1(t) + Y_2(t)$  назовем вторым приближением матрицы  $Z(t)$ .

Продолжим этот процесс и найдем  $n$ -приближение матрицы  $Z(t)$

$$V_n(t) = \sum_{k=1}^n Y_k(t), \quad V_n(0) = I, \quad (8)$$

где  $Y_k(t)$ ,  $k=2, \dots, n$ , — решение уравнения

$$\dot{Y}_k(t) = BY_k(t) - \varepsilon^2 \int_0^t H(s) Y_{k-1}(t-s) ds, \quad Y_k(0) = 0. \quad (9)$$

Заметим, что отыскание матрицы  $V_n(t)$  сводится к последовательному решению линейных неоднородных дифференциальных уравнений (9) с постоянными коэффициентами. Относительно близости построенной матрицы  $V_n(t)$  и точной справедлива

**Л е м м а.** Если выполнены неравенства

$$\|Y(t)\| \leq c_1 \exp(-\alpha t), \quad \alpha > 0; \quad \int_0^\infty \|F(\tau)\| \exp \alpha \tau d\tau \leq c_2, \quad (10)$$

где  $Y(t)$  — фундаментальная матрица уравнения  $\dot{Y}(t) = BY(t)$ ,  $Y(0) = I$ , то для всех  $t \geq 0$  имеет место оценка

$$\|Z(t) - V_n(t)\| \leq c \left\{ \exp \gamma(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} [\gamma(t)]^k \right\} \exp(-\alpha t), \quad (11)$$

где

$$\gamma(t) = \varepsilon^2 c_1 \int_0^t d\tau \int_0^\tau \|H(s)\| \exp \alpha s ds, \quad c = c_1(1 + \varepsilon c_2). \quad (12)$$

Доказательство. Запишем уравнения (9) в интегральной форме

$$Y_k(t) = -\varepsilon^2 \int_0^t Y(t-\tau) d\tau \int_0^\tau H(s) Y_{k-1}(\tau-s) ds, \quad k=2, \dots, n,$$

и оценим их последовательно по норме. Учитывая (10), (12), по индукции находим оценку

$$\|Y_k(t)\| \leq \frac{c}{(k-1)!} [\gamma(t)]^{k-1} \exp(-\alpha t), \quad k=1, \dots, n. \quad (13)$$

Произведем в уравнении (5) замену

$$Z(t) = V_n(t) + U(t), \quad U(0) = 0. \quad (14)$$

Тогда относительно новой переменной получим уравнение в интегральной форме

$$U(t) = -\varepsilon^2 \int_0^t Y(t-\tau) d\tau \int_0^\tau H(s) [Y_n(\tau-s) + U(\tau-s)] ds. \quad (15)$$

Если обозначить

$$v(t) = \|U(t)\| \exp \alpha t \quad (16)$$

и учесть (12), (13), то из (15) находим неравенство

$$v(t) \leq \varepsilon^2 c_1 \int_0^t d\tau \int_0^\tau \|H(s)\| \exp \alpha s v(\tau-s) ds + \frac{c}{n!} [\gamma(t)]^n = w(t). \quad (17)$$

Продифференцируем правую часть неравенства (17) и воспользуемся условием, что  $v(t-s) \leq w(t-s) \leq w(t)$  при  $0 \leq s \leq t$ . В результате получим неравенство

$$\dot{w} \leq \dot{\gamma}(t) w(t) + \frac{c}{(n-1)!} [\gamma(t)]^{n-1} \dot{\gamma}(t),$$

решение которого имеет вид

$$w(t) \leq \frac{c \exp \gamma(t)}{(n-1)!} \int_0^t \dot{\gamma}(\tau) [\gamma(\tau)]^{n-1} \exp[-\gamma(\tau)] d\tau.$$

Для получения окончательной оценки (11) остается взять по частям интеграл и воспользоваться соотношением (14), (16), (17). Лемма доказана.

Наложим теперь дополнительное ограничение, считая выполненным условие

$$\gamma(t) \leq \beta t, \quad 0 < \beta < \alpha, \quad \beta = \varepsilon^2 c_1 \int_0^\infty \|H(s)\| \exp \alpha s ds. \quad (18)$$

Тогда из оценки (11) следует, что  $\|Z(t) - V_n(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Таким образом, в качестве приближенного решения системы (1) следует взять выражение

$$\xi_n(t) = V_n(t) x_0 + \int_0^t V_n(t-\tau) f(\tau) d\tau. \quad (19)$$

Оценим погрешность этого приближенного решения, для чего вычтем выражение (19) из (2) и результат оценим по норме. Если воспользоваться монотонностью функции, стоящей в фигурных скобках оценки (14), и

соотношением (18), то эта погрешность для всех  $t \geq 0$  оценивается неравенством

$$\|x(t) - \xi_n(t)\| \leq c \|x_0\| q(t) + \frac{cb}{\alpha - \beta} \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^n, \quad (20)$$

где обозначено

$$q(t) = \left\{ \exp \beta t - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (\beta t)^k \right\} \exp(-\alpha t).$$

Следовательно, справедлива

**Теорема.** Если выполнены неравенства (10) и (18), то при всех  $t \geq 0$  имеет место оценка (20), где  $x(t)$  — точное решение неоднородной системы (1), а  $\xi_n(t)$  определяется выражением (19), причем при  $t \rightarrow \infty$  и выборе  $n$  погрешность приближенного решения может быть сделана сколь угодно малой. При  $f(t) \equiv 0$  эта погрешность стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$  для любого  $n$ .

Метод эквивалентного соответствия позволяет с любой степенью точности находить матрицу  $Z(t)$ , а следовательно, и решение системы вида (1). Погрешность метода оценивается на бесконечном промежутке соотношением (14), а границы изменения параметра  $\varepsilon$  задаются условием (18).

Метод эквивалентного соответствия уже в первом приближении учитывает все слагаемые порядка  $\varepsilon$  и, следовательно, дает более точный результат, чем метод осреднения <sup>(3)</sup>. Другим преимуществом метода является простота построения высших приближений. Кроме того, в отличие от метода осреднения, метод эквивалентного соответствия применим и в том случае, когда матрица  $A$  имеет кратные чисто мнимые собственные значения.

Авторы выражают искреннюю благодарность А. А. Ильюшину за постановку задачи и ценные замечания.

Ташкентский государственный университет  
им. В. И. Ленина

Поступило  
3 III 1975

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря, Основы математической теории термовязкоупругости, М., «Наука», 1970. <sup>2</sup> В. В. Москвитин, Сопротивление вязко-упругих материалов, М., «Наука», 1970. <sup>3</sup> А. Н. Филатов, Методы осреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях, «Фан», 1971. <sup>4</sup> Я. В. Быков, о некоторых задачах теории интегродифференциальных уравнений, Фрунзе, 1957.