

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

А. В. ГЛУШАК

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В СЕКТОРЕ НА ПЛОСКОСТИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 1 IV 1975)

В заметке устанавливается разрешимость задачи Дирихле для одного вырождающегося эллиптического уравнения в секторе на плоскости $(x, y) \in R_2$. Кроме того, полученные результаты позволяют рассмотреть задачу Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения в неограниченной области пространства R_{n+2} , граница которой состоит из двух $(n+1)$ -мерных гиперплоскостей $x=0$ и $y=0$, пересекающихся по «ребру» $x=0, y=0$.

Для невырождающихся эллиптических операторов второго порядка аналогичная задача рассматривалась Д. Ньюменом в ^(1, 2). Им были доказаны, в частности, коэрцитивные оценки решений такого рода задач. Эллиптические уравнения высокого порядка в областях с угловыми точками исследовались в работах В. А. Кондратьева ⁽³⁾ и М. Меригота ⁽⁴⁾.

1. В области $\Omega \subset R_2$, являющейся положительным квадрантом на плоскости $(x, y) \in R_2$, изучается задача

$$L(x, y, \partial_x, \partial_y)u - \lambda g(x, y)u = f(x, y); \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x, y), \quad (2)$$

где

$$L(x, y, \partial_x, \partial_y) = \partial_x(a(x, y)\partial_x) + 2b(x, y)\partial_x\partial_y + \partial_y(c(x, y)\partial_y) + d(x, y)\partial_x + h(x, y)\partial_y,$$

λ — достаточно большое положительное число, $\partial\Omega$ — граница области Ω .

Мы используем в дальнейшем обозначение $\beta_1(x, y) = O[\beta_2(x, y)]$, если существует положительная постоянная $c > 0$ такая, что для любых $(x, y) \in \Omega$ $c^{-1} \leq \beta_1(x, y) \beta_2^{-1}(x, y) \leq c$.

Условие 1. Существуют однородные по $(x, y) \in R_2$ степени $m, m \geq 2$, функции $a_0(x, y) \in C^1(\overline{\Omega})$ и $c_0(x, y) \in C^1(\overline{\Omega})$ такие, что $a_0(0, y) = 0, a_0(x, y) > 0$ при $x > 0, a_0(x, y) = O[a(x, y)]$; $c_0(x, 0) = 0, c_0(x, y) > 0$ при $y > 0, c_0(x, y) = O[c(x, y)]$. Кроме того,

$$|\partial_x a_0(x, y)| \leq k a_0^{(m-1)/m}(x, y),$$

$$|\partial_y a_0(x, y)| \leq k \min \{a_0(x, y) c^{-1/m}(x, y), a_0^{(m-1)/m}(x, y)\};$$

$$|\partial_x c_0(x, y)| \leq k \min \{a_0(x, y) c^{-1/m}(x, y), a_0^{(m-1)/m}(x, y)\};$$

$$|\partial_y c_0(x, y)| \leq k c_0^{(m-1)/m}(x, y).$$

Условие 2. Существуют положительные в Ω функции $\alpha(x, y) \in C^1(\overline{\Omega})$ и $\gamma(x, y) \in C^1(\overline{\Omega})$ такие, что:

а) функции $A(x, y) = a(x, y)\alpha^{-2}(x, y), B(x, y) = b(x, y)\alpha^{-1}(x, y)\gamma^{-1}(x, y), C(x, y) = c(x, y)\gamma^{-2}(x, y)$ ограничены в Ω ;

б) $\inf_{(x, y) \in \Omega} \{A(x, y)C(x, y) - B^2(x, y)\} > 0$.

Условие 3. Коэффициенты оператора L — вещественные непрерывно дифференцируемые в Ω функции, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} |\partial_x a(x, y)| &\leq k a^{(m-1)/m}(x, y), \\ |\partial_y a(x, y)| &\leq k \min \{a(x, y) c^{-1/m}(x, y), a^{(m-1)/m}(x, y)\}; \\ |\partial_x b(x, y)| &\leq k a^{(m-2)/2m}(x, y) \sqrt{c(x, y)}, \quad |\partial_y b(x, y)| \leq k \sqrt{a(x, y)} c^{(m-2)/2m}(x, y); \\ |\partial_x c(x, y)| &\leq k \min \{a^{-1/m}(x, y) c(x, y), c^{(m-1)/m}(x, y)\}, \\ |\partial_y c(x, y)| &\leq k c^{(m-1)/m}(x, y); \\ |\partial(x, y)| &= O[c^{(m-1)/m}(x, y)], \quad |\partial_x d(x, y)| \leq k a^{(m-2)/m}(x, y), \\ |\partial_y d(x, y)| &\leq k c^{(m-2)/m}(x, y); \\ |h(x, y)| &= O[a^{(m-1)/m}(x, y)], \quad |\partial_x h(x, y)| \leq k a^{(m-2)/m}(x, y), \\ |\partial_y h(x, y)| &\leq k c^{(m-2)/m}(x, y). \end{aligned}$$

Функция $g(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ и $g(x, y) = O[(a(x, y) + c(x, y))^{(m-2)/m}]$.

Через $H_{\alpha, \gamma}^2(\Omega)$ обозначается пространство функций $u(x, y)$, дважды обобщенно дифференцируемых в Ω , с конечной нормой

$$\begin{aligned} \|u\|_{2, \alpha, \gamma}^2 &= \int_{\Omega} [|\alpha^2 \partial_x^2 u|^2 + |\alpha \gamma \partial_x \partial_y u|^2 + |\gamma^2 \partial_y^2 u|^2 + \\ &+ |\gamma^{2(m-1)/m} \partial_x u|^2 + |\alpha^{2(m-1)/m} \partial_y u|^2 + |(\alpha + \gamma)^{2(m-2)/m} u|^2] dx dy. \end{aligned} \quad (3)$$

Замечание 1. Добавление в правую часть формулы (3) слагаемых

$$\int_{\Omega} [|\alpha^{2(m-1)/m} \partial_x u|^2 + |\gamma^{2(m-1)/m} \partial_y u|^2] dx dy$$

приводит к новой норме, эквивалентной норме $\|u\|_{2, \alpha, \gamma}$.

На границе $\partial\Omega$ введем пространство функций $W_{\alpha, \gamma}^1(\partial\Omega)$ с нормой

$$\begin{aligned} \langle \varphi \rangle_{1, \alpha, \gamma} &= \left\{ \int_{B_1} [|\alpha^{(2m-1)/m} \partial_x \varphi|^2 + |\alpha^{(2m-3)/m} \varphi|^2] dx \right\}^{1/2} + \\ &+ \left\{ \int_{B_2} [|\gamma^{(2m-1)/m} \partial_y \varphi|^2 + |\gamma^{(2m-3)/m} \varphi|^2] dy \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

где $B_1 = \{(x, y) \in \bar{\Omega}: y=0\}$, $B_2 = \{(x, y) \in \bar{\Omega}: x=0\}$.

Через $\|f\|_0$ будем в дальнейшем обозначать норму функции $f(x, y)$ в пространстве $L_2(\Omega)$.

Результаты работы (⁵) о разрешимости граничных задач в полосе для вырождающихся на границах этой полосы эллиптических уравнений позволяют установить справедливость следующих утверждений.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1–3, $d(x, y) < 0$, $h(x, y) < 0$ в Ω .

Тогда при любых $f(x, y) \in L_2(\Omega)$, $\varphi(x, y) \in W_{\alpha, \gamma}^1(\partial\Omega)$ и достаточно большом $\lambda > 0$ существует единственное решение $u(x, y)$ задачи (1), (2), принадлежащее пространству $H_{\alpha, \gamma}(\Omega)$; при этом справедлива оценка

$$\|u\|_{2, \alpha, \gamma} \leq c_1 (\|f\|_0 + \langle \varphi \rangle_{1, \alpha, \gamma}), \quad (4)$$

где постоянная $c_1 > 0$ не зависит от u , f и φ .

Теорема 1'. Пусть выполнены условия 1–3, $d(x, y) > 0$, $h(x, y) > 0$ в Ω .

Тогда при любых $f(x, y) \in L_2(\Omega)$ и достаточно большом $\lambda > 0$ существует единственное решение $u(x, y)$ уравнения (1), принадлежащее пространству $H_{\alpha, \gamma}(\Omega)$; при этом справедлива оценка

$$\|u\|_{2, \alpha, \gamma} \leq c_1' \|f\|_0 \quad (5)$$

с постоянной $c_1' > 0$, не зависящей от u и f .

Теоремы 1 и 1' доказываются вначале для случая, когда коэффициенты оператора L — однородные функции $(x, y) \in R_2$. Их доказательство для общего случая проводится методом продолжения по параметру.

З а м е ч а н и е 2. Оценки (4), (5) коэрцитивны, поскольку с помощью условий 1–3 легко проверить выполнение неравенства

$$\|f\|_0 + \langle \Phi \rangle_{\lambda, \alpha, \gamma} \leq c' \|u\|_{2, \alpha, \gamma}.$$

2. Рассмотрим в области $D = \{(x, y, z) \in D: (x, y) \in \Omega, z \in R_n\}$ следующую задачу:

$$L(x, y, \partial_x, \partial_y) v - \lambda g(x, y) v + g_1(x, y) \Delta_z v = f(x, y, z); \quad (6)$$

$$v|_{\partial D} = \Phi(x, y, z), \quad (7)$$

где $\Delta_z = \sum_{i=1}^n \partial_{z_i}^2$, ∂D — граница области D .

Введем пространство $\mathcal{H}_{\alpha, \gamma}^2(D)$ дважды обобщенно дифференцируемых в D функций $v(x, y, z)$ с конечной нормой

$$\begin{aligned} \|v\|_{2, \alpha, \gamma}^2 = & \int_{R_n} \|v(\cdot, \cdot, z)\|_{2, \alpha, \gamma}^2 dz + \\ & + \int_D \left[\sum_{i=1}^n |\alpha^{2(n-1)/m} \partial_x \partial_z v|^2 + \sum_{j=1}^n |\gamma^{2(m-1)/m} \partial_y \partial_z v|^2 + \right. \\ & \left. + \sum_{|\mu| \leq 2} |(\alpha + \gamma)^{2(m-2)/m} \partial_z^\mu v|^2 \right] dx dy dz \end{aligned}$$

и пространство $\mathcal{W}_{\alpha, \gamma}^1(\partial D)$ на границе ∂D с нормой

$$\begin{aligned} \langle \Phi \rangle_{1, \alpha, \gamma} = & \left\{ \int_{B_3} \left[|\alpha^{\frac{2m-1}{m}} \partial_x \Phi|^2 + \sum_{|\mu| \leq 1} |\alpha^{\frac{2m-3}{m}} \partial_z^\mu \Phi|^2 \right] dx dz \right\}^{1/2} + \\ & + \left\{ \int_{B_4} \left[|\gamma^{\frac{2m-1}{m}} \partial_y \Phi|^2 + \sum_{|\mu| \leq 1} |\gamma^{\frac{2m-3}{m}} \partial_z^\mu \Phi|^2 \right] dy dz \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

где $B_3 = \{(x, y, z) \in \bar{D}: y=0\}$, $B_4 = \{(x, y, z) \in \bar{D}: x=0\}$.

Через $\|f\|_0$ будем в дальнейшем обозначать норму функции $f(x, y, z)$ в пространстве $L_2(D)$.

С помощью преобразования Фурье по переменной $z \in R_n$ и теорем 1 и 1' устанавливаются следующие утверждения.

Теорема 2. Пусть $m \geq 3$, выполнены условия 1–3, $d(x, y) < 0$, $h(x, y) < 0$ в Ω , $g_1(x, y) \in C(\bar{\Omega})$, $g_1(x, y) \geq k_1(a(x, y) + c(x, y))^{(m-2)/m}$, $k_1 > 0$.

Тогда при любых $f(x, y, z) \in L_2(D)$, $\Phi(x, y, z) \in \mathcal{W}_{\alpha, \gamma}^1(\partial D)$ и достаточно большом $\lambda > 0$ существует единственное решение $v(x, y, z)$ задачи (6), (7), принадлежащее пространству $\mathcal{H}_{\alpha, \gamma}^2(D)$, причем справедлива оценка

$$\|v\|_{2, \alpha, \gamma} \leq c_2 (\|f\|_0 + \langle \langle \Phi \rangle \rangle_{1, \alpha, \gamma}), \quad (8)$$

где постоянная $c_2 > 0$ не зависит от v , f и Φ .

Теорема 2'. Пусть $m \geq 3$, выполнены условия 1–3, $d(x, y) > 0$, $h(x, y) > 0$ в Ω , $g_1(x, y) \in C(\bar{\Omega})$, $g_1(x, y) \geq k_1(a(x, y) + c(x, y))^{(m-2)/m}$.

Тогда при любой $f(x, y, z) \in L_2(D)$ и достаточно большом $\lambda > 0$ существует единственное решение $v(x, y, z)$ уравнения (6), принадлежащее пространству $\mathcal{H}(D)$, причем справедлива оценка

$$\|v\|_{2, \alpha, \gamma} \leq c_2' \|f\|_0 \quad (9)$$

с постоянной $c_2' > 0$, не зависящей от v , f и Φ .

Замечание 3. Теоремы 2 и 2' справедливы и в случае $m=2$.

Замечание 4. Если дополнительно известно, что $g_1(x, y) \leq k_2(a(x, y) + c(x, y))^{(m-2)/m}$ ($k_2 > 0$), то оценки (8), (9) коэрцитивны.

Введем в рассмотрение пространство $X = L_2(D) \times \mathcal{W}_{\alpha, \gamma}^1(\partial D)$. Норму $\|\cdot\|_X$ в пространстве X определим как сумму норм компонент.

Теорема 3. Пусть $m=2$, выполнены условия 1–3, $d(x, y) < 0$, $h(x, y) < 0$ в Ω , $g_1(x, y) \in C(\bar{\Omega})$, $g_1(x, y) \geq k_1(a(x, y) + c(x, y))^{(m-2)/m}$.

Тогда существует оператор R , определенный на функциях $\{f, \varphi\} = F \in X$, действующий в $\mathcal{H}_{\alpha, \gamma}^2(D)$ и такой, что

$$\begin{aligned} \|RF\|_{2, \alpha, \gamma} &\leq c_3 \|F\|_X, \\ RF|_{\partial D} &= \varphi, \\ (L + g_1 \Delta_z) RF &= f + TF, \end{aligned}$$

где T — ограниченный оператор из пространства X в пространство $\mathcal{H}_{\alpha, \gamma}^2(D)$.

Теорема 3'. Пусть $m=2$, выполнены условия 1–3, $d(x, y) > 0$, $h(x, y) > 0$ в Ω , $g_1(x, y) \in C(\bar{\Omega})$, $g_1(x, y) \geq k_1(a(x, y) + c(x, y))^{(m-2)/m}$.

Тогда существует оператор R , определенный на функциях $f \in L_2(D)$, действующий в $\mathcal{H}_{\alpha, \gamma}^2(D)$ и такой, что

$$\begin{aligned} \|Rf\|_{2, \alpha, \gamma} &\leq c_3' \|f\|_0, \\ (L + g_1 \Delta_z) Rf &= f + Tf, \end{aligned}$$

где T — ограниченный оператор из $L_2(D)$ в $\mathcal{H}_{\alpha, \gamma}^2(D)$.

Замечание 5. Теоремы, аналогичные 1 и 1', 2 и 2', 3 и 3', справедливы и в случаях $d(x, y) < 0$, $h(x, y) > 0$ ($d(x, y) > 0$, $h(x, y) < 0$).

3. В качестве примера оператора, удовлетворяющего условиям 1–3, можно рассмотреть оператор

$$L_0 = A \partial_x (x^m \partial_x) + 2B(x, y)^{m/2} \partial_x \partial_y + C \partial_y (y^m \partial_y) - y^{m-1} \partial_x - x^{m-1} \partial_y,$$

где постоянные A , B и C подчинены условию $AC - B^2 > 0$ и $m \geq 3$. При этом функции $\alpha(x, y)$ и $\gamma(x, y)$ можно выбрать равными $\alpha(x) = x^{m/2}$ и $\gamma(y) = y^{m/2}$ соответственно.

В силу теоремы 2 при достаточно большом $\lambda > 0$ разрешима следующая задача:

$$\begin{aligned} L_0 v - \lambda (x^2 + y^2)^{(m-2)/2} v + (x^2 + y^2)^{(m-2)/2} \Delta_z v &= f, \\ v|_{\partial D} &= \varphi, \end{aligned}$$

при любых $f \in \mathcal{H}_{x^{m/2}, y^{m/2}}^2(D)$, $\varphi \in \mathcal{W}_{x^{m/2}, y^{m/2}}^1(\partial D)$.

Автор выражает искреннюю благодарность В. П. Глушко за руководство работой.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
19 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ J. M. Newman, Commun. on Pure and Appl. Math., v. 22, 825 (1969). ² J. M. Newman, Proc. Am. Math. Soc., v. 32, № 1, 120 (1972). ³ В. А. Кондратьев, Тр. Московск. математич. общ., т. 16, 207 (1967). ⁴ M. Merigot, C. R., v. 278, sér. A, 1487 (1974). ⁵ В. Г. Булавин, В. П. Глушко, Тр. математич. фак. Воронежск. гос. унив., в. 7, 29 (1972).