

УДК 517.94

МАТЕМАТИКА

Академик АН ТаджССР А. ДЖУРАЕВ

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Общую линейную систему двух вещественных уравнений с частными производными первого порядка в трехмерном евклидовом пространстве R^3 можно записать в виде одного комплексного уравнения с комплекснозначными коэффициентами и правой частью

$$P(x, D)u \equiv \sum_{j=1}^3 a_j(x)u_{x_j} + b_j(x)\bar{u}_{x_j} + a_0(x)u + b_0(x)\bar{u} = f(x), \quad (1)$$

где $u(x) = u(x_1, x_2, x_3)$ — искомая комплекснозначная функция, а $\bar{u}(x)$ — комплексно-сопряженная ей функция.

Теорема 1. Если $b_j \equiv 0$, a_j постоянны, причем $\text{Im}(a_1 \bar{a}_2) \neq 0$ и

$$M_{a_3}^p(x_3 + \alpha x_1 + \beta x_2), \quad M_{b_0}^p(x_3 + \alpha x_1 + \beta x_2), \quad M_f^p(x_3 + \alpha x_1 + \beta x_2) < \infty$$

при $x \in R^3$, $p > 2$, где $\alpha = \text{Im}(a_2 \bar{a}_3) / \text{Im}(a_1 \bar{a}_2)$, $\beta = \text{Im}(\bar{a}_1 a_3) / \text{Im}(a_1 \bar{a}_2)$,

$$M_F^p(x_3 + \alpha x_1 + \beta x_2) = \iint_{|\xi| < 1} |F(\xi, \eta, x_3 + \alpha(x_1 - \xi) + \beta(x_2 - \eta))|^p d\xi d\eta + \\ + \iint_{|\xi| > 1} |\xi|^{2(p-2)} |F(\xi, \eta, x_3 + \alpha(x_1 - \xi) + \beta(x_2 - \eta))|^p d\xi d\eta,$$

то уравнение (1) разрешимо для любой правой части и всякое его обобщенное решение, принадлежащее пространству H_p^1 , на характеристической плоскости $x_3 + \alpha x_1 + \beta x_2 = \text{const}$ будет непрерывным по Гельдеру на этой плоскости с показателем, равным $(p-2)/p$.

Теорема 2. При условиях теоремы 1 всякое ограниченное на R^3 решение однородного уравнения (1), исчезающее на бесконечности, тождественно обращается в нуль.

Указанными в теоремах 1, 2 свойствами обладают также некоторые уравнения вида (1) с переменными в главной части коэффициентами. Такими являются, например, уравнения

$$L_1(u) \equiv u_{x_1} + iu_{x_2} + 2(x_1 + ix_2)u_{x_3} = f(x), \\ L_2(u) \equiv u_{x_1} + iu_{x_2} + 2i(x_1 - ix_2)u_{x_3} = f(x).$$

Характеристиками первого являются семейства эллиптических параболоидов $x_3 - x_1^2 - x_2^2 = \text{const}$, а характеристиками второго — семейство гиперболических параболоидов $x_3 - 2x_1x_2 = \text{const}$.

2. Вернемся к общему уравнению (1) и будем рассматривать его в некоторой окрестности Ω_x начала координат.

Предположим, что существует два различных гладких семейства вещественных характеристик $\omega_j(x) = \text{const}$, $j=2, 3$. Обозначим через $\omega_1(x)$ такую гладкую вещественную функцию, что якобиан $J(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ отображения $\xi = \omega(x)$ ($\xi_j = \omega_j(x)$, $j=1, 2, 3$) области Ω_x в область Ω_ξ отличен от нуля.

Пусть

$$A_j(\xi) = a_j(\omega^{-1}(\xi)), \quad B_j(\xi) = b_j(\omega^{-1}(\xi)), \quad F(\xi) = f(\omega^{-1}(\xi)), \\ P_j(\xi) = p_j(\omega^{-1}(\xi)), \quad Q_j(\xi) = q_j(\omega^{-1}(\xi)), \quad \Delta_k(\xi) = \delta_k(\omega^{-1}(\xi)),$$

$$p_j(x) = p(x, \omega_j) = \sum_{k=1}^3 a_k \frac{\partial \omega_j}{\partial x_k}, \quad q_j(x) = q(x, \omega_j) = \sum_{k=1}^3 b_k \frac{\partial \omega_j}{\partial x_k},$$

$$\delta_k(x) = \delta(x, \omega_k) = \operatorname{Im} \left\{ [|a_1|^2 \bar{b}_2 b_3 + a_2 \bar{a}_3 |b_1|^2 + \bar{a}_1 a_3 \bar{b}_1 b_3 + a_1 \bar{a}_2 \bar{b}_1 b_3] \frac{\partial \omega_k}{\partial x_1} + \right. \\ \left. + [\bar{a}_1 a_3 |b_2|^2 + |a_2|^2 \bar{b}_1 \bar{b}_3 + a_2 \bar{a}_3 \bar{b}_1 b_2 + a_1 \bar{a}_2 \bar{b}_2 b_3] \frac{\partial \omega_k}{\partial x_2} + \right. \\ \left. + [a_1 \bar{a}_2 |b_3|^2 + |a_3|^2 \bar{b}_1 b_2 + \bar{a}_1 a_3 \bar{b}_2 b_3 + a_2 \bar{a}_3 b_1 \bar{b}_3] \frac{\partial \omega_k}{\partial x_3} \right\}.$$

Если $\Delta_k(\xi) \neq 0$, $k=2, 3$; $\xi \in \Omega_\xi$, то $P_2(\xi) \overline{P_3(\xi)} - Q_2(\xi) \overline{Q_3(\xi)} \neq 0$, $\xi \in \Omega_\xi$, ибо нетрудно убедиться, что

$$\operatorname{Im} [(\overline{P_3(\xi)} P_1(\xi) - Q_3(\xi) \overline{Q_1(\xi)}) (\overline{P_2(\xi)} P_3(\xi) - Q_2(\xi) \overline{Q_3(\xi)})] = \\ = -\Delta_2(\xi) J(\omega_1, \omega_2, \omega_3),$$

$$\operatorname{Im} [(\overline{P_3(\xi)} P_1(\xi) - Q_2(\xi) \overline{Q_1(\xi)}) (\overline{P_2(\xi)} P_3(\xi) - Q_2(\xi) \overline{Q_3(\xi)})] = \\ = \Delta_3(\xi) \cdot J(\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

Поэтому уравнения

$$v_{\xi_1} + \lambda_1(\xi) v_{\xi_1} + A(\xi) v + B(\xi) \bar{v} = g_1(\xi); \quad (3)$$

$$v_{\xi_3} + \lambda_2(\xi) v_{\xi_3} + C(\xi) v + D(\xi) \bar{v} = g_2(\xi), \quad (4)$$

где

$$\lambda_1 = (\overline{P_3} P_1 - Q_3 \overline{Q_1}) / (\overline{P_2} \overline{P_3} - \overline{Q_2} \overline{Q_3}), \quad A = \overline{P_3} A_0 / (\overline{P_2} \overline{P_3} - \overline{Q_2} \overline{Q_3}), \\ B = \overline{P_3} B_0 / (\overline{P_2} \overline{P_3} - \overline{Q_2} \overline{Q_3}), \quad g_1 = \overline{P_3} F / (\overline{P_2} \overline{P_3} - \overline{Q_2} \overline{Q_3}), \\ \lambda_2 = (\overline{P_2} P_1 - Q_2 \overline{Q_1}) / (\overline{P_2} P_3 - Q_2 \overline{Q_3}), \quad C = \overline{P_2} A_0 / (\overline{P_2} P_3 - Q_2 \overline{Q_3}), \\ D = \overline{P_2} B_0 / (\overline{P_2} P_3 - Q_2 \overline{Q_3}), \quad g_2 = \overline{P_2} F / (\overline{P_2} P_3 - Q_2 \overline{Q_3}),$$

соответственно на плоскостях переменных (ξ_2, ξ_1) и (ξ_3, ξ_1) являются эллиптическими.

Лемма. Если $v(\xi)$ является решением одновременно уравнений (3) и (4), то функция $u(x) = v(\omega(x))$ удовлетворяет уравнению (1).

Действительно, умножая (3) на $P_2(\xi)$, а (4) на $P_3(\xi)$, складывая полученные равенства и принимая во внимание, что при $k=2, 3$ $\omega_k(x) = \text{const}$ — вещественные характеристики, т. е. $|P_k(\xi)|^2 - |Q_k(\xi)|^2 = 0$, $k=2, 3$, $\xi \in \Omega_\xi$, получаем

$$\sum_{k=1}^3 P_k(\xi) v_{\xi_k} + A_0(\xi) v + B_0(\xi) \bar{v} = F(\xi). \quad (5)$$

Умножая теперь (3) на $\overline{Q_2(\xi)}$, а (4) на $\overline{Q_3(\xi)}$ и складывая полученные равенства, получаем также

$$\sum_{k=1}^3 \overline{Q_k(\xi)} v_{\xi_k} = 0. \quad (6)$$

Принимая во внимание (5) и (6), а также равенства

$$u_{x_j} = \sum_{k=1}^3 v_{\xi_k} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j},$$

получаем $P(x, D)u = f(x)$, ч.т.д.

Если коэффициенты и правые части уравнения (3) при каждом фиксированном значении ξ_3 таким, что $\xi \in \Omega_{\xi}$ суммируемы с p -й степенью в области $U_{\xi} = \Omega_{\xi} \cap (\xi_3 = \text{const})$, а коэффициенты и правые части уравнения (4) при каждом фиксированном значении ξ_2 таким, что $\xi \in \Omega_{\xi}$ суммируемы с p -й степенью в области $V_{\xi} = \Omega_{\xi} \cap (\xi_2 = \text{const})$, то обобщенные решения этих уравнений будут непрерывными по Гельдеру в области $U_{\xi} \cup V_{\xi}$ с показателем $(p-2)/p$ при $p > 2$, а так как согласно лемме эти функции удовлетворяют уравнению (1), то таким путем получаем класс гладких решений этого уравнения.

3. Выше мы рассмотрели случай уравнения (1), когда оно имеет вещественные характеристики и установили не только безусловную разрешимость неоднородных уравнений *, но и связь трехмерных уравнений с разрывными коэффициентами с эллиптическими «двумерными» уравнениями и получили непрерывные по Гельдеру решения. Ставший уже классическим пример Ганса Леви (1) «неразрешимого» уравнения $L_0(u) = u_{x_1} + iu_{x_2} - 2i(x_1 + ix_2)u_{x_3} = f$, разумеется, не обладает вещественными характеристиками и в то же время не является эллиптическим уравнением в R^3 . В настоящее время имеется много обобщений уравнения Г. Леви и по проблеме разрешимости (по крайней мере локальной) уравнений с переменными коэффициентами получены существенные результаты (см. (4-7)).

Теорема 3. *Существует бесконечное число линейно независимых функций класса $C^1(R^3)$, равных нулю на бесконечности, удовлетворяющих однородному уравнению Леви $L_0(u) = 0$ в R^3 , причем неоднородное уравнение $L_0(u) = f(x_3)$ и $f(x_3) \in L_2(-\infty, \infty)$ разрешимо в классе $H_2^1(R^3)$ тогда и только тогда, когда $f(x_3)$ является граничным значением аналитической функции в верхней полуплоскости.*

Действительно, легко проверить, что при $n=0, 1, 2, \dots$ функции

$$u_n(x) = (x_1 + ix_2)^n / (x_1^2 + x_2^2 + 1 - ix_3)^{n+1} \quad (7)$$

принадлежат $C^1(R^3)$, исчезают на бесконечности и удовлетворяют однородному уравнению $L_0(u_n) = 0$, $n=0, 1, 2, \dots$, т. е. являются теми линейно независимыми функциями, которые нарушают теорему Лиувилля для уравнения Леви. Обозначив теперь через $\tilde{f}(\xi_3)$ преобразование Фурье ** функции $f(x_3) \in L_2(-\infty, \infty)$ в случае разрешимости уравнения $L_0(u) = f(x_3)$, будем иметь $\partial \tilde{u} / \partial \bar{z} + \xi_3 z \tilde{u} = \tilde{f}(\xi_3)$, $z = x_1 + ix_2$. Отсюда, с точностью до решений однородного уравнения,

$$\tilde{u}(z, \xi_3) = \frac{\tilde{f}(\xi_3)}{\xi_3 \cdot z} (1 - e^{-\xi_3 |z|^2}). \quad (8)$$

Эта формула показывает, что если $\tilde{f}(\xi_3) \neq 0$ при $\xi_3 < 0$, то $\tilde{u}(z, \xi_3)$ будет расти по экспоненте при $|z| \rightarrow \infty$. Поэтому необходимо $\tilde{f}(\xi_3) = 0$ при $\xi_3 < 0$, т. е. $f(x_3)$ аналитически продолжима в верхнюю полуплоскость. Если же $f(x_3)$ аналитически продолжима в верхнюю полуплоскость, то легко видеть, что неоднородное уравнение имеет решение

$$u(x) = -\frac{1}{\pi} \iint_E \frac{f(x_3 + i(|z|^2 - |\xi|^2)) d\xi d\eta}{\xi - z}, \quad z = x_1 + ix_2. \quad (9)$$

Формула (9) легко получается из (8) при $\xi_3 > 0$ использованием формулы обратного преобразования Фурье и формулы Коши

$$f(x_3 + i(|z|^2 - |\xi|^2)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - (x_3 + i(|z|^2 - |\xi|^2))}, \quad |\xi| < |z|.$$

* Локальная разрешимость для гладких гиперболических систем с некротными характеристиками следует из работы (2).

** Т. е. $\tilde{f}(\xi_3) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_3) e^{-i\xi_3 x_3} dx_3$.

Итак, ядро и коядро оператора Леви бесконечномерны. Возникает вопрос: нельзя ли присоединить к оператору Леви младшие члены так, чтобы видоизмененный оператор имел конечномерное ядро? В связи с этим рассмотрим оператор ($\lambda = \text{const}$)

$$L_{\lambda}(u) = u_{x_1} + i u_{x_2} - 2i(x_1 + i x_2) u_{x_3} - \lambda(x_1 + i x_2)(x_1^2 + x_2^2 - i x_3) u. \quad (10)$$

Теорема 4. Если $\text{Re } \lambda > 0$, то всякое решение класса $C^1(R^3)$ уравнения $L_{\lambda}(u) = 0$, исчезающее на бесконечности, тождественно обращается в нуль.

Действительно, полагая $z = r e^{i\theta}$ и представляя решения уравнения $L_{\lambda}(u) = 0$ в виде ряда Фурье

$$u(x) = u_0(r, x_3) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k e^{i k \theta} + u_{-k} e^{-i k \theta}$$

и приравнявая нулю коэффициенты, относительно функций $\omega_k(r, x_3) = = r^{-k} u_k(r, x_3)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\omega_{-k}(r, x_3) = r^k u_{-k}(r, x_3)$, $k = 1, 2, \dots$, получим уравнения ($r > 0$, $-\infty \leq x_3 \leq \infty$)

$$\frac{1}{2r} \frac{\partial \omega_k}{\partial r} - i \frac{\partial \omega_k}{\partial x_3} - \frac{\lambda}{3} (r^2 - i x_3) \omega_k = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Умножая обе части полученных равенств на i и полагая $\rho = r^2$, будем иметь

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial x_3} + i \frac{\partial \omega_k}{\partial \rho} - \frac{\lambda}{2} (x_3 + i \rho) \omega_k = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Отсюда следует, что функции $\Phi_k = \omega_k \cdot e^{-1/4 \lambda (x_3^2 + \rho^2)}$ голоморфны в верхней полуплоскости, а так как $\omega_{-k}|_{\rho=0} = 0$ при $k > 0$, то $\Phi_k(x_3, \rho) \equiv 0$ при $k < 0$. Если учесть, что $u_k \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$ и $k > 0$, то при $\text{Re } \lambda > 0$ голоморфные функции Φ_k имеют нуль бесконечного порядка в бесконечно удаленной точке, потому $\Phi_k(x_3, r) \equiv 0$ при $k \geq 0$, т. е. $u_k(x_3, r) \equiv 0$ при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Следовательно, $u(x) \equiv 0$, ч.т.д.

Математический институт с Вычислительным центром
Академии наук ТаджССР
Душанбе

Поступило
20 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ H. Lewy, Ann. of Math., v. 66, N 2, 155 (1957). ² И. Г. Петровский, Матем. сб., т. 2 (44), № 5, 815 (1937). ³ И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М., 1959. ⁴ Л. Хёрмандер, Линейные дифференциальные операторы, ИЛ, 1965. ⁵ Ф. Тревс, УМН, т. 29, № 2 (176), 252 (1974). ⁶ L. Nirenberg, F. Trèves, Comm. Pure and Appl. Math., v. 14, 331 (1963). ⁷ Ю. В. Егоров, УМН, т. 26, 2 (158), 183 (1971).