

К. Х. БОЙМАТОВ

L_2 -ОЦЕНКИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 15 I 1975)

В настоящей заметке речь пойдет о L_2 -оценках производных обобщенных решений $u(x)$ эллиптического дифференциального уравнения

$$Pu=f, \quad u, f \in L_2(\Omega), \quad (1)$$

где Ω — произвольное открытое множество, $\Omega \subset R_n$.

В первых пунктах работы, несмотря на отсутствие граничных условий, существует резольвента (из-за вырождения, либо из-за того, что свободный член неограниченно растет возле границы). Результаты являются новыми также в случае всего пространства. В заключительном пункте заметки мы даем L_2 -оценки для производных обобщенных решений уравнения (1), не предполагая вырождения и неограниченности свободного члена возле границы. Оценки в этом случае даются с помощью весовых множителей, которые стремятся к нулю при подходе к границе.

1. Пусть Ω — произвольное открытое множество в R_n . Оператор P , порожденный дифференциальным выражением

$$P(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D_x^\alpha,$$

рассматривается на функциях $u(\cdot) \in L_2(\Omega)$, которые имеют обобщенные производные $D_x^\alpha u(x)$ для всех α таких, что $a_\alpha(x) \neq 0$, причем

$$\sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D_x^\alpha u(x) \in L_2(\Omega).$$

Мы будем предполагать, что символ $P(x, s) \neq 0$ для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n \setminus \{0\}$.

Важную роль при оценке резольвенты оператора P будет играть следующая лемма о разбиении единицы.

Лемма. Пусть $f(x)$ — локально ограниченная функция, заданная на Ω , и $f(x) \geq 1$. Пусть для любых $\delta \in [0, 1]$, $M > 0$ выполняется в Ω условие: для $|x-y|f(y)^\delta < M$

$$f(x) \leq K_M f(y)^{1+\kappa(1-\delta)},$$

где $\kappa < 2$, K_M зависит только от M . Пусть существует $\varepsilon > 0$ такое, что если $|x-y|f(y)^{1-\varepsilon} < M$, то $f(x) \leq K_M f(y)$.

Тогда, если $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_0$ для всех $x_0 \in \partial\Omega$, то существует разбиение единицы множества Ω :

$$\sum_{z \in Z_\alpha} \varphi_z^2(x) = 1,$$

где Z_α — счетное подмножество множества Ω , и выполняются следующие условия:

- 1) $\varphi_z(x) = 0$, если $|x-z|f(z) > 1$;
- 2) $|D_x^\alpha \varphi_z(x)| \leq c_\alpha f(z)^{|\alpha|}$, $c_\alpha = c_\alpha(\varepsilon, \kappa, K_M)$;

3) пусть $T_z, z \in Z_\Omega$, — произвольная система равномерно ограниченных операторов, тогда

$$\left| \sum_{z \in Z_\Omega} \chi_z T_z \chi_z \right| \leq c \sup_{z \in Z_\Omega} |\chi_z T_z \chi_z|,$$

где c зависит только от n, ε, κ ; χ_z — оператор умножения на характеристическую функцию множества $\text{supp } \varphi_z(\cdot)$.

З а м е ч а н и е. Кратность разбиения единицы в лемме может быть бесконечной.

Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям леммы. Обозначим через P_z замкнутый дифференциальный оператор в $L_2(R_n)$ с символом

$$P_z(x, s) = \sum_{0 < |\alpha| \leq 2m} a_\alpha(z) s^\alpha + \tilde{a}_z(x),$$

где $\tilde{a}_z(x) = a_0(x)$ при $|x - z| f(z) < 1$ и равна среднему значению $a_0(\cdot)$ по множеству $\{x \mid |x - z| f(z) < 1\}$ в противном случае. Ясно, что оператор P_z имеет резольвенту. Пусть существует число κ_0 такое, что

$$|P(z, s)| \geq \kappa_0 |a_0(z)| > 1, \quad (1')$$

$$|a_0(x)| \leq M_0 |a_0(z)| \quad \text{при} \quad |x - z| f(z) < 1. \quad (2)$$

Тогда $|P_z^{-1}| \leq (\kappa_0 a_0(z))^{-1}$. Поэтому, обозначив $R_z = P_z^{-1}$, из неравенства

$$|\tilde{a}_z(x) - a_0(z)| u(x) \big|_{L_2} \leq (1 + M_0) |a_0(z)| u(x) \big|_{L_2} \leq (1 + M_0) / \kappa_0^{-1} P_z u(x) \big|_{L_2}$$

получаем

$$|(\tilde{a}_z(\cdot) - a_0(z)) R_z| \leq \kappa_0^{-1} (1 + M_0).$$

Обозначим через $P_{0,z}$ эллиптический оператор с символом $P(z, s)$, пусть $R_{0,z} = P_{0,z}^{-1}$. Тогда $R_z = R_{0,z} (E + (\tilde{a}_z(x) - a_0(z)) R_z)$, т. е. $R_z = R_{0,z} T_{0,z}$, где $|T_{0,z}| \leq 1 + \kappa_0^{-1} (1 + M)$.

Положим

$$F = \sum_{z \in Z_\Omega} \varphi_z R_z \varphi_z.$$

Имеем

$$\begin{aligned} PF &= \sum [P, \varphi_z] R_z \varphi_z + \sum \varphi_z (P - P_z) R_z \varphi_z + E = \\ &= \sum [P, \varphi_z] R_{0,z} T_{0,z} \varphi_z + \sum \varphi_z (P - P_z) R_{0,z} T_{0,z} \varphi_z + E. \end{aligned}$$

Применяя лемму, получим

$$|PF - E| \leq c \sup_{z \in Z_\Omega} (|[P, \varphi_z] R_{0,z} T_{0,z}| + |\varphi_z (P - P_z) R_{0,z} T_{0,z}|),$$

где c зависит только от ε, κ и n, M_0, K_M .

Проделявая дальнейшие оценки, как в (1'), мы получаем

Предложение 1. При сформулированных выше условиях существует число τ , зависящее только от $\varepsilon, n, \kappa, M_0, K_M$, такое, что, если для всех $x \in \Omega, s \in R_n \setminus \{0\}$

$$\sum a_\alpha(x) f^{|\alpha_1|}(x) |s^{\alpha_2}| \leq \tau |P(x, s)|, \quad (3)$$

где суммирование ведется по всем $\alpha_1, \alpha_2, \alpha$ таким, что $\alpha_1 \neq 0, |\alpha| \leq 2m, \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, и для $|x - y| f(y) < 1$

$$\sum_{0 < |\alpha| \leq 2m} |(a_\alpha(x) - a_\alpha(y)) s^\alpha| \leq \tau |P(x, s)|, \quad (4)$$

то $|PF - E| < 1$ и, следовательно, область значений оператора P плотна в $L_2(\Omega)$.

Теперь заметим, что если P удовлетворяет условиям (1') — (4), то этим условиям удовлетворяет также оператор P^+ , который определяется через дифференциальное выражение

$$P^+(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} \overline{a_\alpha(x)} D_x^\alpha,$$

причем соответствующий этому случаю оператор F^+ , как видно из определения, равен оператору F^* . Таким образом, имеем

$$|PF - E| < 1, \quad |P^+F^+ - E| < 1. \quad (5)$$

Из неравенств (5), равенства $F^+ = F^*$ и предложения 1 вытекает

Теорема 1. Пусть оператор P удовлетворяет условиям (1') — (4). Тогда P имеет ограниченный обратный оператор P^{-1} и справедливо равенство $P^{-1} = F(E + G)$, где $|G| < 1$.

Замечание. Для выполнения неравенств (2) — (4) необходимо, чтобы либо $\sum_{|\alpha| \leq 2m} |a_\alpha(x)| \rightarrow 0$, либо $|a_0(x)| \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow x_0 \neq \infty$ для каждой граничной точки $x_0 \in \partial\Omega$.

Так как явный вид оператора F известен, используя технику выкладок работы (1), можно легко доказать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть равномерно по $s \in R_n$, $k(x)s^\alpha = O(P(x, s))$, где α — мультииндекс, $k(x)$ — измеримая функция. Пусть оператор P удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда равномерно по всем $u \in D_P$ (D_P — область определения оператора P) выполняется равенство $|k(x)D_x^\alpha u(x)|_{L_2} \leq M|Pu|_{L_2}$.

Следствие. Пусть P удовлетворяет условиям теоремы 1 и $\sum_{|\alpha| \leq 2m} |a_\alpha(x)s^\alpha| = O(P(x, s))$. Тогда имеет место операторное равенство

$$P = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha D^\alpha, \quad (6)$$

где a_α — оператор умножения на функцию $a_\alpha(x)$, D^α — сопряженный оператор к минимальному оператору, порожденному в $L_2(\Omega)$ дифференциальным выражением D_x^α .

Замечание. Неравенство (6) означает, что если $u \in D_P$, то $a_\alpha(x)D_x^\alpha u(x) \in L_2(\Omega)$ для всех $|\alpha| \leq 2m$. Дифференциальное выражение $P(x, D_x)$, соответствующее оператору P , в этом случае называется разделимым (подробно см. (1, 2)).

2. Чтобы применить теоремы 1 и 2 к оператору

$$P = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + q(x), \quad (7)$$

необходимо потребовать для каждой точки $x_0 \in \partial\Omega$ выполнения условия

$$\lim_{x \rightarrow x_0} s(x)/q(x) = 0, \quad s(x) = \inf_{|s|=1} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) s_i s_j.$$

Пусть $f(x)$ — функция, которая удовлетворяет условиям леммы и имеет вид $f(x) = 1 + o(1)\sqrt{q(x)}/\sqrt{s(x)}$. Пусть, далее, $\sum_{i=1}^n |b_i(x)| = o(\sqrt{q(x)}/\sqrt{s(x)})$,

и $q(x) < M_0 q(y)$ для $|x - y| f(y) < 1$. Предположим, что $\lim_{x \rightarrow \partial\Omega, \infty} (a_{ij}(x) - a_{ij}(y))/s(x) = 0$ равномерно по $i, j = 1, 2, \dots, n$, всех $y \in \Omega$ таких, что $|x - y| f(x) < 1$. Тогда, если $a_{ij}(x) = O(s(x))$ для всех $i, j = 1, 2, \dots, n$, то из теорем 1, 2 следует

Предложение 2. При сформулированных выше условиях оператор P имеет резольвенту и

$$\sum \left| a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) \right|_{L_2} + \sum \left| b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \right|_{L_2} + |q(x)u(x)|_{L_2} \leq \tilde{M} |Pu|_{L_2} \quad (8)$$

равномерно по всем $u \in D_P$.

Замечание. Для случая $\Omega \neq R_n$ оценка (8) известна ⁽²⁾ для оператора Штурма — Ливуилля.

3. Вернемся теперь к общему эллиптическому оператору, введенному в п. 1. Пусть для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$ $\operatorname{Re} P(x, s) \geq \kappa_0 |a_0(x)|$, где $\kappa_0 > 0$, причем $a_0(x)$ удовлетворяет условию (2). Пусть $f(\cdot)$ — функция, которая удовлетворяет условиям леммы, $q(\cdot)$ — некоторая положительная функция такая, что для каждой точки $x_0 \in \partial\Omega$, а также для $x_0 = \infty$, если Ω — неограниченное множество,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (q(x) - q(y)) / q(y) = 0$$

равномерно по $|x - y| f(x) < 1$. Обозначим $k(x) = q(x)^{-1}$. Имеет место следующая

Теорема 3. При сформулированных выше условиях существует число τ , зависящее только от $n, \varepsilon, \kappa, M_0, K_M$, такое, что если

$$\sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \\ \alpha_1 \neq 0, |\alpha| \leq 2m}} |a_\alpha(x) f^{|\alpha_1|}(x) s^{|\alpha_2|}| \leq \tau |P(x, s) + q(x)|,$$

$$\sum_{|\alpha| \leq 2m} |a_\alpha(x) s^\alpha| = O(P(x, s))$$

и для $|x - y| f(y) < 1$

$$\sum_{|\alpha| = 2m} |(a_\alpha(x) - a_\alpha(y)) s^\alpha| \leq \tau |P(x, s) + q(x)|,$$

то равномерно по всем $u \in D_P$

$$\sum_{|\alpha| \leq 2m} |k(x) a_\alpha(x) D_x^\alpha u(x)|_{L_2} \leq M |k(x) (Pu)(x)|_{L_2} + M |u(x)|_{L_2}.$$

В заключение автор благодарит проф. Б. М. Левитина за помощь при выполнении работы.

Институт математики с Вычислительным центром
Академии наук ТаджССР
Душанбе

Поступило
6 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ К. Х. Бойматов, ДАН, т. 213, № 5 (1973). ² V. N. Everitt, M. Gieritz, Proc. London Math. Soc., Ser. 3, v. 28, № 2 (1974).