

УДК 002.5/3.5:681.3 КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В. П. КИРИЛЛОВ, А. Е. ПЕТРОВ

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ ВЕРШИН ГРАФА

(Представлено академиком В. С. Семенхиным 6 II 1974)

1. В зависимости от решаемой задачи применяются различные способы задания координат вершин графа, поэтому возникает задача преобразования координат. В настоящей статье эта задача решается для двух способов задания координат вершин графа с пронумерованными дугами (п.н.д.). Определение п.н.д. содержится в работе ⁽¹⁾. Результаты данной работы можно использовать, например, при формировании массивов информации с иерархической структурой.

2. Ниже применяются обозначения и термины, принятые в монографии Берга ⁽¹⁾, а также в работе ⁽⁴⁾.

Символом $|K|$ будем обозначать число элементов множества K . Валентностью вершины x будем называть число дуг, исходящих из вершины x . Символом C_n обозначаем последовательность целых неотрицательных чисел длины n :

$$C_n = c_1, \dots, c_n.$$

Пусть существует взаимно однозначное соответствие

$$k: X \rightarrow K,$$

где X — множество вершин графа, K — множество произвольной природы (как правило, K состоит из числовых последовательностей). Тогда $k(x)$ будем называть координатами вершины x .

В работе ⁽⁴⁾ дается один из способов построения координат на п.н.д., будем эти координаты обозначать символом $\bar{k}(x)$.

3. Вершина x лежит на уровне n , если и только если

$$\bar{k}(x) = c_1, \dots, c_{n-1}.$$

Максимальный номер уровня обозначим H ; пусть $0 \leq n \leq H-1$.

$\bar{K}_n$ — множество координат вершин уровня $n+1$ — линейно упорядочено отношением, определенным следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{k}(x) = c_1, \dots, c_n < \bar{k}(y) = c'_1, \dots, c'_n \Leftrightarrow c_1 < c'_1 \vee c_1 = c'_1 \wedge c_2 < c'_2 \vee \dots \\ \dots \vee c_1 = c'_1 \wedge c_2 = c'_2 \wedge \dots \wedge c_{n-1} = c'_{n-1} \wedge c_n < c'_n. \end{aligned} \quad (1)$$

При каждом $i=0, 1, 2, \dots, H-1$ существует единственное взаимно однозначное, сохраняющее порядок отображение множества $\bar{K}_i$ на множество $N_i = \{0, 1, \dots, |\bar{K}_i| - 1\}$:

$$\varphi_i: \bar{K}_i \rightarrow N_i.$$

Введем новое координатное отображение:

$$\hat{k}: X \rightarrow \hat{K},$$

где $\hat{K}$ состоит из упорядоченных пар целых неотрицательных чисел, причем если $\bar{k}(x) \in \bar{K}_i$, $0 \leq i \leq H-1$, то $\hat{k}(x) = (i, \varphi_i(k(x)))$. Взаимная однозначность отображения очевидна.

Введем таблицу T , состоящую из H столбцов различной длины. Элементы таблицы — целые неотрицательные числа — обозначим символами t_j^n , где $j \geq 0$ — номер строки. $n \geq 1$ — номер столбца. Значения элементов определим следующим образом:

1) Первый столбец содержит один элемент t_0^1 , равный валентности корня п.н.д.

2) Пусть n -й столбец, $1 \leq n < H$, содержит $m+1$ элемент $t_0^n, \dots, t_m^n$, причем $t_0^n + \dots + t_m^n = p$, тогда $(n+1)$ -й столбец содержит p элементов $t_0^{n+1}, \dots, t_{p-1}^{n+1}$. причем элемент t_i^{n+1} равен валентности той вершины $\bar{k}(x) \in \bar{K}_n$, для которой $\varphi_n(\bar{k}(x)) = i$.

З а м е ч а н и е. i -я строка таблицы содержит элементы в тех столбцах j , для которых $i \leq |\bar{K}_{j-1}| - 1$.

Введем однозначное, но не взаимно однозначное отображение набора координат $\bar{K}$ в множество целых неотрицательных чисел

$$A: \bar{K} \rightarrow N$$

при помощи следующих соотношений:

$$1) A(C_0) = 0;$$

$$2) A(C_{i+1}) = \sum_{j=0}^{A(C_i)-1} t_j^{i+1} + c_{i+1}, \text{ где } C_i = c_1, \dots, c_i \in \bar{K}_i \text{ и } C_{i+1} = c_1, \dots, c_i, c_{i+1} \in \bar{K}_{i+1}, i=0, 1, \dots, H-1.$$

Теорема. $A(C_i) \equiv \varphi_i(C_i)$ на множестве $\bar{K}_i$ при $i=0, 1, \dots, H-1$.

Доказательство проводится по индукции.

А. $A(C_i) \equiv 0 + c_i = c_i \equiv \varphi_i(C_i)$ при $i=1$.

Б. Пусть на множестве $\bar{K}_M$ $A(C_M) \equiv \varphi_M(C_M)$ при $i=M < H$.

а) Из предположения индукции с помощью определений таблицы T и отображения A нетрудно получить, что $C_{M+1} > C'_{M+1}$, если и только если

$$A(C_{M+1}) > A(C'_{M+1}), \quad C_{M+1}, C'_{M+1} \in \bar{K}_{M+1}.$$

б) Из предположения индукции следует, что $0 \leq A(C_M) \leq |\bar{K}_M| - 1$, причем для любого $j_M \in N_M$ существует последовательность $C_M \in \bar{K}_M$ такая, что $A(C_M) = j_M$. По определению таблицы T ,

$$|\bar{K}_{M+1}| = \sum_{j=0}^{|\bar{K}_M|-1} t_j^{M+1};$$

очевидно,

$$0 \leq A(C_{M+1}) \leq |\bar{K}_{M+1}| - 1, \quad C_{M+1} \in \bar{K}_{M+1}.$$

Возьмем произвольное $j_{M+1} \in N_{M+1}$ и положим

$$j_M = \max \left\{ j: \sum_{i=0}^j t_i^{M+1} \leq j_{M+1} \right\} + 1, \quad c_{M+1} = j_{M+1} + \sum_{i=0}^{j_M-1} t_i^{M+1}. \quad (2)$$

Легко видеть, что $j_M \in N_M$. По предположению, существует последовательность $C_M = c_1, \dots, c_M \in \bar{K}_M$ такая, что $A(C_M) = j_M$. Тогда, очевидно, последовательность $C_{M+1} = c_1, \dots, c_M, c_{M+1}$ удовлетворяет условию $A(C_{M+1}) = j_{M+1}$. Из а) и б) следует, что A взаимно однозначно и с сохранением порядка отображает $\bar{K}_{M+1}$ на N_{M+1} . Но такое отображение единственно, следовательно, $A(C_{M+1}) \equiv \varphi_{M+1}(C_{M+1})$ на $\bar{K}_{M+1}$. Тогда по индукции утверждение теоремы верно при $i=0, 1, \dots, H-1$.

4. Выведенные соотношения позволяют преобразовать координаты $\bar{k}(x)$ вершины x в координаты $\hat{k}(x)$ и обратно. Действительно, если $\bar{k}(x) = c_1, \dots, c_n \in \bar{K}_n$, то $\hat{k}(x) = (n, A(\bar{k}(x)))$. Наоборот, если $\hat{k}(x) = (n, l)$, то, подставляя в соотношения (2) $j_n = l$, получим j_{n-1} и c_n ; подставляя в (2) j_{n-1} , найдем j_{n-2} и c_{n-1} и т. д. Применяя соотношения (2) n раз, получим координаты $\bar{k}(x) = c_1, \dots, c_n$ вершины x .

5. Результат, полученный для п.н.д., можно перенести на произвольное PP -дерево (Planted Planar Tree). Определение PP -дерева и BUV -кода содержится в работах ^(2, 3). PP -дерево (X, U, a, R) можно преобразовать в пра́дерево с нумерованными дугами (п.н.д.), ориентируя все ребра в направлении от корня и занумеровав дуги, выходящие из каждой вершины в соответствии с упорядоченностью их конечных вершин. В силу определений Кларнера ⁽³⁾, множество X линейно упорядочено отношением R , следовательно, набор координат линейно упорядочен отношением R' — образом отношения R при отображении $\bar{k}: X \rightarrow \bar{K}$.

Линейное упорядочение, заданное соотношениями (1), можно рассматривать как сужение отношения R' на K_n , тем самым оно будет определено независимо от координат $\bar{k}(x)$. Таблица T в этом случае будет представлять собой слегка модифицированный BUV -код. Поэтому доказательство теоремы без каких-либо изменений переносится на случай PP -деревьев.

Поступило
31 X 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ К. Берж, Теория графов и ее применения, М., ИЛ, 1962. ² R. C. Read, The Coding of Various Kinds of Unlabeled Trees, Graph Theory and Computing, N. Y., 1972. ³ D. A. Klarner, J. Combinatorial Theory, v. 9, 4, 401 (1970). ⁴ А. Е. Петров, ДАН, т. 223, № 4 (1975).