

Ю. Т. ЛИСИЦА

КЛАССИФИКАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ХОПФА В ТЕОРИИ ШЕЙПОВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 4 IV 1975)

К. Борсуком была построена теория шейпов для метризуемых компактов. Основными понятиями этой теории является понятие фундаментальной последовательности $f = \{f_h, X, Y\}$ и фундаментальной гомотопности таких фундаментальных последовательностей ⁽¹⁾. В настоящей работе дается классификация фундаментально-гомотопических классов фундаментальных последовательностей $f = \{f_h, X, Y\}$ из компакта X в компакт Y в случае, когда Y является одновременно фундаментальным абсолютным окрестностным ретрактом и аппроксимационно связным в размерности 1 (т. е. $Y \in \text{FANR} \cap \text{AC}^1$) при естественных других ограничениях, накладываемых на эти компакты. Фундаментальные гомотопические классы перечисляются с помощью некоторых инвариантов теории шейпов, а именно: групп когомологий и гомологий Александрова — Чеха, фундаментальных групп $\pi_n(Y)$ в смысле Борсука и когомологических групп $\pi^n(X)$ компакта X .

1°. Для решения естественной задачи продолжения фундаментальных последовательностей $f = \{f_h, A, Y\}$ с замкнутых подмножеств A компакта X на подмножества, содержащие A в качестве собственного подмножества, легче пользоваться более простым понятием, чем фундаментальные последовательности, а именно аппроксимационными последовательностями в смысле Кристи ⁽²⁾ (см. ⁽³⁾).

2°. До конца изложения всегда будем предполагать, что компакт $Y \in \text{FANR} \cap \text{AC}^1$. Пусть теперь B — произвольное клеточное разбиение, A — некоторое его подразбиение. Положим $X^n = A \cup B^n$, где B^n — n -мерный остов разбиения B .

Пусть $\xi = \{\xi_h, X^n \rightarrow Y\}$ — произвольная аппроксимационная последовательность из X^n в Y . Каждая такая аппроксимационная последовательность следующим образом определяет $(n+1)$ -мерную кощепь $c^{n+1}(\xi)$ разбиения B с коэффициентами в фундаментальной гомотопической группе $\pi_n(Y)$. Пусть σ — произвольная ориентированная $(n+1)$ -мерная клетка разбиения B . Ее граница $\partial\sigma$ является n -мерной сферой. Ограничение $\xi_\sigma = \xi|_{\partial\sigma}$ задает некоторый элемент $[\xi_\sigma]$ группы $\pi_n(Y)$. Кощепь $c^{n+1}(\xi)$ определяется формулой $[c^{n+1}(\xi)](\sigma) = [\xi_\sigma] \in \pi_n(Y)$, если $\sigma \in B$ и $\dim \sigma = n+1$. Эту $(n+1)$ -мерную кощепь $c^{n+1}(\xi)$ разбиения B назовем препятствием к продолжению аппроксимационной последовательности ξ . Как и в случае отображений, препятствие $c^{n+1}(\xi)$ является $(n+1)$ -мерным коциклом разбиения B относительно A , т. е. $c^{n+1}(\xi) \in Z^{n+1}(B, A; \pi_n(Y))$.

Лемма 2.1. Аппроксимационная последовательность $\xi = \{\xi_h, X^n \rightarrow Y\}$ тогда и только тогда продолжается на X^{n+1} , когда $c^{n+1}(\xi) = 0$.

Лемма 2.2. Если аппроксимационные последовательности $\xi = \{\xi_h, X^n \rightarrow Y\}$ и $\eta = \{\eta_h, X^n \rightarrow Y\}$ фундаментально гомотопны, то $c^{n+1}(\xi) = c^{n+1}(\eta)$.

Пусть теперь заданы две аппроксимационные последовательности $\xi = \{\xi_h, B \rightarrow Y\}$ и $\eta = \{\eta_h, B \rightarrow Y\}$, совпадающие на множестве $A \subset B$. Пусть, далее, ограничения $\xi|_x$ и $\eta|_x$ для $A \subset X \subset B$ фундаментально гомотопны относительно A . Рассмотрим множество $Z = B \times \{0\} \cup X \times I \cup B \times \{1\}$, а в нем замкнутое подмножество $A' = B \times \{0\} \cup A \times I \cup B \times \{1\}$. На A' определяем аппроксимационную последовательность $\psi = \{\psi_h, A' \rightarrow Y\}$ следующим образом. Пусть на $B \times \{0\}$ она равна ξ , на $B \times \{1\}$ равна η , на $A \times I$ равна $\xi|_A = \eta|_A$ для любого $t \in I$. По определению ψ является аппроксимационной последовательностью.

Лемма 2.3. Существует аппроксимационная последовательность $\psi' = \{\psi'_k, Z \rightarrow Y\}$, продолжающая аппроксимационную последовательность ψ .

Пусть теперь $\xi^0 = \{\xi_k^0, X^n \rightarrow Y\}$ и $\xi^1 = \{\xi_k^1, X^n \rightarrow Y\}$ — две аппроксимационные последовательности, совпадающие на A и фундаментально гомотопные на X^{n-1} относительно A . Рассмотрим множество $Z = X^n \times \{0\} \cup X^{n-1} \times I \cup X^n \times \{1\}$. В силу леммы 2.3 можно определить аппроксимационную последовательность $\psi = \{\psi_k, Z \rightarrow Y\}$, совпадающую на $X^n \times \{0\}$ с ξ^0 и на $X^n \times \{1\}$ с ξ^1 . Обозначим через h ограничение ψ' на $X^{n-1} \times I$. Эта аппроксимационная последовательность h является фундаментальной гомотопией относительно A между аппроксимационными последовательностями $\xi^0|_{X^{n-1}}$ и $\xi^1|_{X^{n-1}}$. Наличие такой аппроксимационной последовательности $\psi' = \{\psi'_k, Z \rightarrow Y\}$ дает возможность, так же как и в случае отображений $((^i), \text{стр. 248})$, определить деформационную коцепь $d^n(\xi^0, \xi^1, h) \in C^n(B, A; \pi_n(Y))$. В частности, когда $\xi^0|_{X^{n-1}} = \xi^1|_{X^{n-1}}$ и $h = \xi^0|_{X^{n-1}}$ для любого $t \in I$, коцепь $d^n(\xi^0, \xi^1, h)$ будем обозначать символом $d^n(\xi^0, \xi^1)$ и называть коцепью, различающей аппроксимационные последовательности ξ^0 и ξ^1 .

Лемма 2.4. Фундаментальная гомотопия $h = \{h_k, X^{n-1} \times I \rightarrow Y\}$ тогда и только тогда допускает продолжение $h^* = \{h_k^*, X^n \times I \rightarrow Y\}$, для которого $h^*|_{X^n \times \{0\}} = \xi^0$ и $h^*|_{X^n \times \{1\}} = \xi^1$, когда $d^n(\xi^0, \xi^1, h) = 0$.

Лемма 2.5. Имеет место соотношение

$$\delta d^n(\xi^0, \xi^1, h) = c^{n+1}(\xi^0) - c^{n+1}(\xi^1).$$

Пусть теперь $\xi^0 = \{\xi_k^0, X^n \rightarrow Y\}$ — произвольная аппроксимационная последовательность, а $h = \{h_k, X^{n-1} \times I \rightarrow Y\}$ — произвольная фундаментальная гомотопия относительно A , совпадающая на $X^{n-1} \times \{0\}$ с ξ^0 . Основной в этом пункте является

Лемма 2.6. Для любой n -мерной коцепи $c \in C^n(B, A; \pi_n(Y))$ существует такая аппроксимационная последовательность $\xi^1 = \{\xi_k^1, X^n \rightarrow Y\}$, что $\xi^1|_{X^{n-1}} = h|_{X^{n-1} \times \{1\}}$ и $d(\xi^0, \xi^1, h) = c$.

Следствие 2.1. Для любого коцикла $z \in Z^{n+1}(B; A; \pi_n(Y))$, когомологиичного относительно A коциклу $c^{n+1}(\xi^0)$, существует такая аппроксимационная последовательность $\xi^1 = \{\xi_k^1, X^n \rightarrow Y\}$, что $\xi^1|_{X^{n-1}} = h|_{X^{n-1} \times \{1\}}$ и $c^{n+1}(\xi^1) = z$.

Пусть $\xi = \{\xi_k, X^n \rightarrow Y\}$ — произвольная аппроксимационная последовательность. Рассмотрим класс когомологий $\gamma^{n+1}(\xi) \in H^{n+1}(B, A; \pi_n(Y))$ препятствия $c^{n+1}(\xi) \in Z^{n+1}(B, A; \pi_n(Y))$ к продолжению ξ .

Теорема 2.1. Равенство $\gamma^{n+1}(\xi) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такая аппроксимационная последовательность $\eta^* = \{\eta_k^*, X^{n-1} \rightarrow Y\}$, что $\eta^*|_{X^{n-1}} = \xi|_{X^{n-1}} = \xi|_{X^{n-1}}$.

Пусть теперь $\xi = \{\xi_k, B \rightarrow Y\}$ и $\eta = \{\eta_k, B \rightarrow Y\}$ — две аппроксимационные последовательности, совпадающие на A и фундаментально гомотопные относительно A на X^{n-1} . Так как ξ и η определены на X^n , то определяется деформационная коцепь $d^n(\xi, \eta, h)$. Эту коцепь будем называть теперь препятствием к продолжению фундаментальной гомотопии h . Препятствие $d^n(\xi, \eta, h)$ является n -мерным коциклом разбиения B относительно A , т. е. $d^n(\xi, \eta, h) \in Z^n(B, A; \pi_n(Y))$. Пусть $\delta^n(\xi, \eta, h) \in H^n(B, A; \pi_n(Y))$ — класс когомологий коцикла $d^n(\xi, \eta, h)$.

Теорема 2.2. Равенство $\delta^n(\xi, \eta, h) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такая фундаментальная гомотопия $h^* = \{h_k^*, X^n \times I \rightarrow Y\}$, что

$$h^*|_{X^n \times \{0\}} = \xi|_{X^n}, \quad h^*|_{X^n \times \{1\}} = \eta|_{X^n}, \quad h^*|_{X^{n-2} \times I} = h|_{X^{n-2} \times I}.$$

3°. Пусть X_0 — подкомпакт компакта X , а $\xi = \{\xi_k, X_0 \rightarrow Y\}$ — произвольная аппроксимационная последовательность из X_0 в Y . Пусть α — конечное открытое покрытие компакта X , а A_α — нерв этого покрытия. Пусть A_0 — подразбиение нерва A_α , определяемое теми элементами покрытия α , которые пересекаются с X_0 (по непустому множеству).

Определение 3.1. Аппроксимационную последовательность $\psi_\alpha = \{\psi_{k, \alpha}, A_0 \rightarrow Y\}$ будем называть аппроксимационной последова-

тельностью замощения для ξ , если для любого барицентрического отображения $\Phi_\alpha: X \rightarrow A_\alpha$ ограничение $\psi_\alpha \circ \Phi_\alpha|_{x_0}$ фундаментально гомотопна аппроксимационной последовательности ξ . Покрытие α назовем замощением для ξ .

Если конечное открытое покрытие β , вписанное в замощение α для ξ , то β является замощением для ξ . В работе ⁽³⁾ доказано, что для любой аппроксимационной последовательности $\xi = \{\xi_k, X_0 \rightarrow Y\}$ существует замощение α .

Определение 3.2. Аппроксимационная последовательность $\xi = \{\xi_k, X_0 \rightarrow Y\}$ называется n -продолжаемой, если существует такое замощение α , что соответствующая аппроксимационная последовательность замощения $\psi_\alpha = \{\psi_{k,\alpha}, A_0 \rightarrow Y\}$ продолжается на $A^n = \bar{A}^n \cup A_0$, где $\bar{A}^n$ — n -мерный остов перва A_α .

Теперь для каждой аппроксимационной последовательности $\xi = \{\xi_k, X_0 \rightarrow Y\}$ определим некоторое подмножество $O^{n+1}(\xi)$ группы когомологий Александера — Чеха $H^{n+1}(X, X_0; \pi_n(Y))$. Если ξ не n -продолжаема, то $O^{n+1}(\xi) = \emptyset$. Если ξ n -продолжаема, то по определению существует такое замощение α , что соответствующая аппроксимационная последовательность замощения $\psi_\alpha = \{\psi_{k,\alpha}, A_0 \rightarrow Y\}$ обладает продолжением $\psi' = \{\psi'_{k,\alpha}, A^n \rightarrow Y\}$. Препятствие $c^{n+1}(\psi'_\alpha) \in Z^{n+1}(A_\alpha, A_0, \pi_n(Y))$ определяет в группе $H^{n+1}(X, X_0; \pi_n(Y))$ некоторый элемент $\gamma^{n+1}(\psi'_\alpha)$; множество всех таких элементов принимаем за $O^{n+1}(\xi)$.

Лемма 3.1. Аппроксимационная последовательность $\xi = \{\xi_k, X_0 \rightarrow Y\}$ $(n+1)$ -продолжаема тогда и только тогда, когда множество $O^{n+1}(\xi)$ содержит нуль группы $H^{n+1}(X, X_0; \pi_n(Y))$.

Определение 3.3. Две аппроксимационные последовательности ξ и η из X_0 в Y называются n -фундаментально гомотопными, если существует единое замощение α для ξ и η с такими аппроксимационными последовательностями замощения ψ_α и φ_α , что $\psi_\alpha|_{A^n} = \varphi_\alpha|_{A^n}$.

Теперь паре аппроксимационных последовательностей ξ и η из X в Y сопоставим некоторое подмножество $O^n(\xi, \eta)$ группы когомологий Александера — Чеха $H^n(X, \pi_n(Y))$ следующим образом. Если ξ и η не n -фундаментально гомотопны, то $O^n(\xi, \eta) = \emptyset$. Если ξ и η n -фундаментально гомотопны, то в силу определения существует такое единое замощение α для ξ и η , что соответствующие аппроксимационные последовательности замощения ψ_α и φ_α совпадают на A^n . Следовательно, определено препятствие $d^n(\psi_\alpha, \varphi_\alpha) \in Z^n(A_\alpha, \pi_n(Y))$, которое определяет элемент $\delta^n(\xi, \eta)$ в группе $H^n(X; \pi_n(Y))$; множество всех таких элементов принимаем за $O^n(\xi, \eta)$.

⁴. В этом пункте дополнительно будем предполагать, что $\pi_r(Y) = 0$ для всех $r < n$, а это по теореме Гуревича ⁽⁶⁾ эквивалентно тому, что $H_r(Y; Z) = 0$ для всех $r < n$, где Z — группа целых чисел.

Пусть теперь $\xi = \{\xi_k, X_0 \rightarrow Y\}$ — произвольная аппроксимационная последовательность. Из предыдущего пункта вытекает, что ξ n -продолжаема на X , так что первые нетривиальные препятствия встречаются в размерности $n+1$. Как и в случае отображений, оказывается, что множество $O^{n+1}(\xi)$ состоит только из одного элемента группы $H^{n+1}(X, X_0; \pi_n(Y))$.

Пусть α — замощение для ξ , а $\psi_\alpha = \{\psi_{k,\alpha}, A_0 \rightarrow Y\}$ — аппроксимационная последовательность замощения. Можно считать, что $\psi_{k,\alpha}(A_0^{n-1}) = y_0 \in Y$ для всякого k , где A_0^{n-1} — $(n-1)$ -мерный остов разбиения A_0 . Рассмотрим постоянную аппроксимационную последовательность $\theta = \{\theta_k, A_0 \rightarrow Y\}$, т. е. для любого k полагаем $\theta_k(A_0) = y_0$. Так как $\xi|_{A_0^{n-1}} = \theta|_{A_0^{n-1}}$, то определена различающая коцепь $d^n(\xi, \theta) \in C^n(A_0; \pi_n(Y))$, причем $d^n(\xi, \theta)$ — коцикл, который определяет класс когомологий $\kappa^n(\xi) \in H^n(X_0; \pi_n(Y))$. Этот класс мы будем называть характеристическим классом аппроксимационной последовательности ξ .

Лемма 4.1. Для рассматриваемой аппроксимационной последовательности ξ множество $O^{n+1}(\xi)$ состоит из одного элемента $\omega^{n+1}(\xi) = \delta^* \kappa^n(\xi) \in \in H^{n+1}(X, X_0; \pi_n(Y))$, где δ^* — кограничный гомоморфизм $\delta^*: H^n(X_0; \pi^n(Y)) \rightarrow H^{n+1}(X, X_0; \pi_n(Y))$.

Пусть теперь ξ, η — две аппроксимационные последовательности из X в Y , а $\kappa^n(\xi)$ и $\kappa^n(\eta)$ — их характеристические классы.

Лемма 4.2. Для рассматриваемых аппроксимационных последовательностей ξ и η множество $O^n(\xi, \eta)$ состоит из одного элемента $\omega^n(\xi, \eta) \in \in H^n(X; \pi_n(Y))$, связанного с классами $\kappa^n(\xi)$ и $\kappa^n(\eta)$ соотношением $\kappa^n(\xi) - \kappa^n(\eta) = \omega^n(\xi, \eta)$.

Лемма 4.3. Если для всех r , удовлетворяющих неравенствам $n < r < \dim X$, выполнено условие $H^{r+1}(X; \pi_r(Y)) = 0$, то для каждого элемента $\gamma \in H^n(X; \pi_n(Y))$ существует такая аппроксимационная последовательность $\xi = \{\xi_k, X \rightarrow Y\}$, что $\kappa^n(\xi) = \gamma$.

Теорема 4.1. Если для всех r , удовлетворяющих неравенствам $n < r < \dim X$, выполнено условие $H^{r+1}(X; \pi_r(Y)) = 0$, то n -фундаментально гомотопические классы $[\xi]$ аппроксимационных последовательностей $\xi = \{\xi_k, X \rightarrow Y\}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы $H^n(X; \pi_n(Y))$; оно задается отображением $\xi \rightarrow \kappa^n(\xi)$.

Теорема 4.2. Если для всех r , удовлетворяющих неравенствам $n < r \leq \dim X$, выполнены условия $H^{r+1}(X; \pi_r(Y)) = 0 = H^r(X; \pi_r(Y))$, то фундаментальные гомотопические классы $[\xi] = \{\xi_k, X \rightarrow Y\}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы $H^n(X; \pi_n(Y))$. Это соответствие задается отображением $\xi \rightarrow \kappa^n(\xi)$.

Замечание 4.1. Из формулы универсальных коэффициентов

$$0 \rightarrow H^r(X, Z) \otimes G \rightarrow H^r(X; G) \rightarrow \text{Tor}_Z(H^{r+1}(X; Z), G) \rightarrow 0 \quad (4.1)$$

вытекает, что условия $H^{r+1}(X, \pi_r(Y)) = 0 = H^r(X; \pi_r(Y))$ в теореме 4.2 можно заменить более сильным условием $H^r(X; Z) = 0$.

5°. Из теоремы 4.2, принимая во внимание замечание 4.1 и применяя последовательно теорему Гуревича (6), можно получить следующее утверждение.

Теорема 5.1. Если $H^r(X; Z) = 0$ для всех $n < r \leq \dim X$, $H_q(Y; Z) = 0$ для всех $q < n$, а $Y \in \text{FANR} \cap \text{AC}^1$, то фундаментальные гомотопические классы $[f]$ фундаментальных последовательностей $f = \{f_k, X, Y\}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы $H^n(X; \pi_n(Y))$.

Если дополнительно предположить, что группа $H^n(X, Z)$ конечного типа (7), то верна следующая теорема, двойственная к теореме 5.1.

Теорема 5.2. Если $H^r(X; Z) = 0$ для всех $n < r \leq \dim X$, $H_q(Y; Z) = 0$ для всех $q < n$, а $Y \in \text{FANR} \cap \text{AC}^1$, то фундаментальные гомотопические классы $[f]$ фундаментальных последовательностей $f = \{f_k, X, Y\}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы $H_n(Y; \pi^n(X))$, где $\pi^n(X)$ — n -мерная когомотопическая группа компакта X .

Теорема 5.3. Если $H^r(X; Z) = 0$ для всех $n < r \leq \dim X$ и $H_q(Y; Z) = 0$ для всех $q < n$, а $Y \in \text{FANR} \cap \text{AC}^1$, то две фундаментальные последовательности $f = \{f_k, X, Y\}$ и $g = \{g_k, X, Y\}$ индуцируют один и тот же гомоморфизм $f_* = g_*: H_n(X; G) \rightarrow H_n(Y; G)$ групп гомологий Александера — Чеха $H_n(X; G)$ и $H_n(Y; G)$ для любой группы коэффициентов G тогда и только тогда, когда они фундаментально гомотопны.

В заключение хочу выразить благодарность и признательность проф. Ю. М. Смирнову за внимание, интерес и ценные советы.

Университет дружбы народов им. П. Лумумбы
Москва

Поступило 26 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ K. Borsuk, Fund. Math., v. 62, 223 (1968). ² D. E. Christie, Trans. Am. Math. Soc., v. 56, 275 (1944). ³ Ю. Т. Лисица, Тр. Московск. матем. общ., т. 32, 93 (1975). ⁴ Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, М., «Мир», 1964. ⁵ Hu Sze-tsen, Trans. Am. Math. Soc., v. 64, 336 (1948). ⁶ S. Mardešić, S. Unger, Glasnik. Math., v. 9 (29), 317 (1974). ⁷ Е. Г. Складенко, УМН, т. 24, 87 (1969).