

В. И. МАЛЫХИН

О МАКСИМАЛЬНЫХ И РАЗЛОЖИМЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. II

(Представлено академиком П. С. Александровым 20 III 1975)

В 1943 г. Хьюитт ⁽¹⁾ и в 1947 г. Катетов ⁽²⁾ ввели несколько своеобразных типов пространств *. Если условно расположить эти типы по увеличению «сложности» их строения, то начать придется с разложимых, а закончить максимальными пространствами. Пространство называется k -разложимым, если оно содержит систему мощности k дизъюнктивных плотных подмножеств. Пространство (X, τ) называется максимально разложимым, если оно $\Delta\tau$ -разложимо **. Пространство называется (не) разложимым, если оно (не) содержит два дизъюнктивных плотных подмножества. Топология максимального пространства характеризуется тем, что нет на том же множестве строго большей топологии (без изолированных точек — см. сноску). Чтобы подчеркнуть необычность свойств максимальных пространств, приведем три критерия максимальной топологии пространства. Итак, пространство (X, τ) максимально, если и только если выполняется любое из следующих условий:

1 (Хьюитт ⁽¹⁾, Катетов ⁽²⁾). Если V — плотное в себе подпространство пространства (X, τ) , то $V \in \tau$.

2 (Катетов ⁽²⁾). Если $x \in [A] \setminus A$, то $\{x\} \cup A$ есть окрестность *** точки x .

3 (Елькин ⁽³⁾). Для всякой точки x система множеств $\bar{x} = \{A \setminus \{x\} : x \in A \in \tau\}$ есть база ультрафильтра на X .

Весьма близки к максимальным и MI -пространства, введенные Хьюиттом ⁽¹⁾. MI определяются как пространства, в которых всякое плотное подмножество открыто. Ясно, что всякое MI -пространство неразложимо.

Максимальные и MI -пространства оказываются нужными при решении некоторых вопросов общей топологии и ряд авторов ^(4, 6, 7) в своих исследованиях подходили к вопросу о существовании максимальных пространств с «хорошими» аксиомами отделимости, однако существование таких пространств оставалось проблемой до 1974 г., когда в работе ⁽⁸⁾ были построены регулярные максимальные пространства произвольного дисперсионного характера при дополнительных теоретико-множественных предположениях, совместных с обычными аксиомами теории множеств. В данной работе мы также широко используем дополнительные теоретико-множественные предположения, причем в простейшей форме: предположения типа СН и аксиому Мартина АМ (о последней см. ⁽¹⁰⁾), для построения максимальных, MI - и разложимых пространств с разнообразными свойствами.

Следующая теорема показывает, в чем состояла одна из трудностей построения регулярного максимального пространства.

Теорема 1. Пусть во вполне регулярном пространстве (X, τ) есть дискретное незамкнутое множество.

* Под пространством здесь и далее понимается бесконечное плотное в себе T_0 -пространство.

** Если $\mathcal{A}$ — семейство подмножеств какого-нибудь множества, то

$$\Delta\mathcal{A} = \min \{ |V| : \Lambda \neq V \in \mathcal{A} \}.$$

*** Окрестность точки не обязательно открытое множество, но содержит точку в своей внутренности.

Тогда существует хаусдорфова, нерегулярная максимальная топология $\tau' \supset \tau$.

Заметим, что до построения в ⁽⁸⁾ (при дополнительных теоретико-множественных предположениях) регулярного максимального пространства не было известно ни одного примера регулярного или вполне регулярного пространства, в котором всякое дискретное подпространство было бы замкнутым.

Теорема 2 (о строении максимальных и MI -пространств).

1. Каждое MI -пространство есть T_1 -пространство.

2. (Хьюитт ⁽¹⁾). Каждое хаусдорфово максимальное пространство является урысоновским.

3. Если в MI -пространстве всякие два дизъюнктивных дискретных подмножества отделяются открытыми подмножествами, то пространство нормально; нормальное MI -пространство наследственно нормально.

4. Коллективно хаусдорфово нульмерное MI -пространство наследственно сильно паракомпактно.

5. Коллективно хаусдорфово MI -пространство счетного псевдохарактера совершенно *.

6. Максимальное пространство, дисперсионный характер топологии которого неизмерим **, имеет счетный псевдохарактер.

7. Коллективно хаусдорфово максимальное пространство, дисперсионный характер которого неизмерим, есть совершенно нормальное наследственно сильно паракомпактное пространство.

8. Каждое MI -пространство содержит дискретное замкнутое подпространство мощности, равной мощности всего пространства.

Теорему 3 предваряет следующее

Определение ⁽⁸⁾. Топология τ на множестве X называется I -топологией, если $\Delta\tau = |X|$ и вес топологии τ не больше $\Delta\tau$.

Теорема 3 ($m^+ = 2^m$) ***. Для всякой I -топологии τ на множестве X мощности m существует коллективно хаусдорфова максимальная топология $\mu \supset \tau$.

Следующие два примера, вместе со следствиями из теорем 6 и 7, придают естественную завершенность теореме 2, показывая, что в максимальном пространстве «склеиваются» далеко не все свойства:

Пример 1 ($m^+ = 2^m$). Существует регулярное, не нормальное максимальное пространство дисперсионного характера m .

Пример 2 ($AM + (c > m)$). Существует сепарабельное нормальное максимальное пространство мощности m .

Ввиду п. 8 теоремы 2 это пространство содержит при $m > \aleph_0$ несчетное дискретное замкнутое подпространство, и так как оно сепарабельно, то оно коллективно хаусдорфовым быть не может.

Нетрудно показать, что экстремально несвязное пространство не может быть плотным подпространством бесконечного произведения, поэтому максимальные пространства — а все они экстремально несвязны, что непосредственно следует из любого критерия 1—3 — также не могут быть плотными подпространствами бесконечных произведений. Справедлива, однако, следующая

Теорема 4 ($m^+ = 2^m$). В произведении $X = \{X_\alpha : \alpha \in m^+\}$, каждый сомножитель которого имеет вес не более m и хотя бы два дизъюнктивных открытых множества, содержится плотное нормальное MI -пространство, дисперсионного характера m .

Теорема 4 допускает некоторое усиление в одном частном случае.

Теорема 5 (AM). В произведении не более c сепарабельных пространств, каждое из которых имеет вес менее c и хотя бы два дизъюнктивных

* Т. е. всякое открытое множество имеет тип F_σ .

** Имеется в виду измеримость по Уламу.

*** Следующий за кардиналом m кардинал обозначен через m^+ .

ных открытых множества, содержится счетное плотное нормальное MI -подпространство.

Было бы интересно найти в D^c счетное плотное неразложимое подпространство, не прибегая к дополнительным теоретико-множественным предположениям.

Следствие из теоремы 4 ($m^+=2^m$). Существует нормальное MI -пространство дисперсионного характера m , удовлетворяющее условию Суслина.

Теорема 6 ($m^+=2^m$). Существует нормальное максимальное пространство дисперсионного характера m , удовлетворяющее условию Суслина.

Теорема 6 вытекает из приведенного выше следствия из теоремы 4 и следующего утверждения:

Предложение 1. Если топология MI -пространства является хаусдорфовой (регулярной, нормальной, совершенной, коллективно хаусдорфовой), то таковой же является и всякая большая топология.

Пусть βR — стоун-чеховское расширение вполне регулярного пространства R . Точка $x \in \beta R \setminus R$ называется далекой (см. ⁽¹¹⁾), если она не лежит в замыкании никакого нигде не плотного подпространства из R .

Теорема 7. Если R — вполне регулярное MI -(максимальное) пространство и $A \subset \beta R \setminus R$, то $R \cup A$ является MI -(максимальным) пространством, если и только если A — дискретное подпространство, состоящее из далеких точек и $[A]_{\beta R} \cap R = \Lambda$.

Теорема 8 ($m^+=2^m$). Пусть максимальное пространство имеет дисперсионный характер m и удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий: а) оно нормально и всякая дизъюнктивная система открытых множеств в нем имеет мощность меньше m ; б) оно коллективно хаусдорфово.

Тогда множество его далеких точек не пусто.

В ⁽⁹⁾ автор доказал (при дополнительном теоретико-множественном предположении, являющемся следствием аксиомы Мартина) существование счетной максимальной группы (т. е. топологической группы, топология которой максимальна). Завершенность этому результату придает

Теорема 9. Не существует максимальных групп несчетного дисперсионного характера.

Этот факт довольно удивителен, ибо в таких ситуациях решение вопроса часто зависит от предположений о существовании «больших» кардиналов.

Методы, развитые при доказательстве и построения теорем и примеров выше, и некоторые идеи из ⁽³⁾ позволяют доказать следующие две теоремы, относящиеся к разложимым пространствам.

Пусть k — произвольное натуральное число, большее 1.

Теорема 10 ($m^+=2^m$). Для всякой H -топологии τ на множестве X мощности m существует большая, чем τ , топология μ такая, что пространство (X, μ) является сильно паракомпактным, k -, но не $(k+1)$ -разложимым пространством дисперсионного характера m . Если же m — неизмеримый по Уламу кардинал, то (X, μ) можно считать еще и совершенно нормальным пространством.

Теорема 11 ($AM+(c=m^+)$). Существует совершенно нормальное, $\aleph_0$ -, но не $\aleph_1$ -разложимое сепарабельное пространство дисперсионного характера m .

Следующие два определения принадлежат Елькину ⁽⁴⁾.

Подмножество топологического пространства называется полукрытым, если оно содержится в замыкании своей внутренности.

Пространство называется глобальным, если в нем всякое полукрытое множество открыто.

Теорема 12 ($AM+(c>m)$). Существует совершенно нормальное глобальное пространство со счетной π -базой и дисперсионного характера m .

Предложение 2. В глобальном пространстве теснота ограничена сверху π -весом.

Следствие из теоремы 12 и предложения 2 ($AM + (c > m)$). Существует совершенно нормальное глобальное пространство со счетной теснотой и дисперсионного характера m .

Некоторый аналог следующей теореме см. в ⁽¹²⁾.

Теорема 13 (AM). На счетном множестве X существует такая регулярная максимальная топология τ , что если Y — регулярное расширение пространства (X, τ) и A — счетное множество в $Y \setminus X$, то $[A]_\tau \cap X = \emptyset$.

Автор признателен проф. В. И. Пономареву за неизменное внимание и интерес к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
5 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ E. Hewitt, Duke Math. J., v. 10, N 2, 309 (1943). ² М. Катеров, Матем. сб., т. 21, № 1, 3 (1947). ³ А. Г. Елькин, Вестн. Московск. унив., матем., мех., № 5, 51 (1969).
⁴ А. Г. Елькин, ДАН, т. 186, № 1, 9 (1969). ⁵ А. Г. Елькин, ДАН, т. 195, № 2, 274 (1970). ⁶ C. E. Aull, Glasnik matem., v. 8, N 2, 305 (1973). ⁷ J. Heubener, Pacific J. Math., v. 43, N 1, 139 (1972). ⁸ В. И. Малыгин, ДАН, т. 218, № 5, 1017 (1974).
⁹ В. И. Малыгин, ДАН, т. 220, № 1, 27 (1975). ¹⁰ В. И. Малыгин, Б. Э. Шанировский, ДАН, т. 213, № 3, 532 (1973). ¹¹ N. J. Fine, L. Gillman, Proc. Am. Math. Soc., v. 43, N 1, 29 (1962). ¹² K. Kunen, Notices Am. Math. Soc., v. 17, N 1, 299 (1970).