

УДК 513.88:513.83

МАТЕМАТИКА

Е. В. ОШМАН, Н. В. НЕВЕСЕНКО

НЕПРЕРЫВНОСТЬ МНОГОЗНАЧНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ В ЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 17 IV 1975)

Пусть E и F — метрические пространства, $K(F)$ — множество всех замкнутых подмножеств пространства F . Отображение $\varphi: E \rightarrow K(F)$ называется многозначным отображением E в F .

Отображение φ называется полунепрерывным сверху (полунепрерывным снизу) ⁽⁷⁾, если множество $\{x \in E: \varphi x \subset G\}$ открыто в E для каждого открытого подмножества $G \subset F$ (соответственно оно замкнуто для каждого замкнутого подмножества $G \subset F$). Если φ полунепрерывно сверху и снизу одновременно, то оно называется непрерывным ⁽⁷⁾. Отображение φ называется H -полунепрерывным сверху (H -полунепрерывным снизу) ⁽⁵⁾, если для каждого $x \in E$ множество φx непусто и условие $x_n \rightarrow x$ влечет

$$\sup \{\rho(y, \varphi x): y \in \varphi x_n\} \rightarrow 0$$

(соответственно, если для каждого $x \in E$ φx непусто и условие $x_n \rightarrow x$ влечет

$$\sup \{\rho(y, \varphi x_n): y \in \varphi x\} \rightarrow 0).$$

Если φ H -полунепрерывно сверху и снизу одновременно, то оно называется H -непрерывным ⁽⁵⁾. Отображение φ называется ρ -непрерывным ⁽¹⁾, если для каждого $x \in E$ φx непусто и условие $x_n \rightarrow x$ влечет

$$\rho(\varphi x, \varphi x_n) = \inf \{\rho(y, z): y \in \varphi x, z \in \varphi x_n\} \rightarrow 0.$$

Если отображение φ полунепрерывно сверху и φx непусто для любого $x \in E$ (H -полунепрерывно снизу), то оно является H -полунепрерывным сверху (полунепрерывным снизу), а если для каждого $x \in E$ φx компактно (непусто и компактно), то справедливо обратное ⁽⁵⁾. Если φ полунепрерывно сверху (полунепрерывно снизу) и φx непусто для любого $x \in E$, то φ является ρ -непрерывным.

Пусть M — множество в E . Многозначное отображение P_M , которое каждой точке $x \in E$ ставит в соответствие множество

$$P_M x = \{y \in M: \rho(x, y) = \rho(x, M)\},$$

называется метрической проекцией E на M ⁽⁶⁾. M называется множеством существования ⁽²⁾, если $P_M x \neq \emptyset$ для любого $x \in E$, и чебышевским ⁽²⁾, если $P_M x$ одноточечно для любого $x \in E$.

Пусть X — линейное нормированное пространство (л.н.п.), X^* — его сопряженное, $S = \{x \in X: \|x\| = 1\}$ — единичная сфера в X , $S^* = \{f \in X^*: \|f\| = 1\}$ — единичная сфера в X^* , $\Gamma_f = \{x \in X: f(x) = 1\} \cap S$ — грань единичной сферы, определяемая функционалом $f \in S^*$. Множество $M \subset X$ называется P -выпуклым ⁽¹⁾, если $P_M x$ непусто и выпукло для любого $x \in X$. M называется строгим солнцем ⁽¹⁾, если для любого $x \in X \setminus M$ $P_M x$ непусто и для любого $y \in P_M x$ $y \in P_M[(1-\lambda)y + \lambda x]$ для всех $\lambda \geq 0$. Множество $M \subset X$ называется ограничено компактным, если пересечение M с любым замкнутым шаром является компактным.

Определение. Л.н.п. X удовлетворяет условно RBR (round body rotund), если для любого $f \in S^* \setminus \Gamma$ либо пусто, либо одноточечно, либо является строго выпуклым телом * в гиперплоскости $\{x \in X: f(x) = 1\}$.

Определения используемых ниже условий HR, EPS приведены в (3, 4).

Теорема 1. В банаховом пространстве X следующие утверждения эквивалентны:

- а) X удовлетворяет условию RBR;
- б) метрическая проекция на любое выпуклое компактное множество полунепрерывна снизу;
- в) метрическая проекция на любое выпуклое ограниченно компактное множество полунепрерывна снизу;
- г) метрическая проекция на любое выпуклое замкнутое множество размерности не выше трех полунепрерывна снизу.

Теорема 2. В конечномерном л.н.п. X следующие утверждения эквивалентны:

- а) X удовлетворяет условию RBR;
- б) метрическая проекция на любое выпуклое замкнутое множество полунепрерывна снизу.

Теорема 3. В л.н.п. X следующие утверждения эквивалентны:

- а) X рефлексивно и удовлетворяет условиям EPS, RBR;
- б) метрическая проекция на любое выпуклое замкнутое множество полунепрерывна снизу;
- в) метрическая проекция на любое выпуклое замкнутое множество H -полунепрерывна снизу.

Теорема 4. В л.н.п. X для непрерывности метрической проекции на любое выпуклое замкнутое множество необходимо и достаточно выполнения одного из следующих утверждений:

- а) X конечномерно и удовлетворяет условию RBR;
- б) X бесконечномерно, рефлексивно, строго выпукло и удовлетворяет условию EPS.

Теорема 5. В л.н.п. X для того, чтобы метрическая проекция на любое выпуклое замкнутое множество была H -непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы X было рефлексивно и удовлетворяло условиям HR, EPS, RBR.

Теорема 6. Если в л.н.п. X метрическая проекция на любое выпуклое замкнутое множество непрерывна, то она и H -непрерывна.

Теорема 7. В бесконечномерном л.н.п. X следующие утверждения эквивалентны:

- а) X рефлексивно, строго выпукло и удовлетворяет условию EPS;
- б) метрическая проекция на любое выпуклое замкнутое множество непрерывна;
- в) каждое выпуклое замкнутое множество из X является чебышевским с непрерывной метрической проекцией.

Теорема 8. Пусть л.н.п. X удовлетворяет условию RBR, M — P -выпуклое строгое солнце с ρ -непрерывной метрической проекцией.

Тогда P_M H -полунепрерывна снизу.

Теорема 9. Пусть л.н.п. X удовлетворяет условию RBR, M — P -выпуклое замкнутое множество с ρ -непрерывной метрической проекцией.

Тогда P_M H -полунепрерывна снизу.

Теорема 10. Пусть л.н.п. X конечномерно и удовлетворяет условию RBR, M — P -выпуклое строгое солнце.

Тогда P_M H -полунепрерывна снизу.

Замечание. Условие строгой солнечности множества в теоремах 8 и 10 опустить нельзя, так как легко построить пример даже двумерного

* Множество $M \subset X$ называется строго выпуклым телом, если оно выпукло, замкнуто, имеет непустую внутренность и его граница не содержит отрезков.

л.н.п., очевидно, удовлетворяющего условию RBR, и P -выпуклого множества в нем, не являющегося строгим солнцем, метрическая проекция на которое не является полунепрерывной снизу. Кроме того, нетрудно построить пример трехмерного л.н.п., удовлетворяющего условию RBR, и строгого солнца в нем, которое не является P -выпуклым.

Пример. Пусть l_2 — пространство вещественных числовых последовательностей $x = \{\xi_i\}$, суммируемых с квадратом. Пусть

$$R = \left\{ x = \{\xi_i\} \in l_2 : \xi_1 = \xi_2 = 0, \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 \leq 1 \right\};$$

$$y(\varphi) = \{\cos \varphi, \sin \varphi, 0, 0, 0, \dots\} \in l_2 \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi);$$

$$z_k(\varphi) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} \left(k - 2 - \frac{\pi}{2\varphi} \right), & \text{если } \left| k - 2 - \frac{\pi}{2\varphi} \right| < 1, \\ 0 & , \text{ если } \left| k - 2 - \frac{\pi}{2\varphi} \right| \geq 1, \end{cases}$$

где $0 < \varphi \leq \pi/2$, $k = 3, 4, 5, \dots$;

$$z(\varphi) = \{0, 0, z_3(\varphi), z_4(\varphi), z_5(\varphi), \dots\} \in S, \quad 0 < \varphi \leq \pi/2;$$

$$A(\varphi) = R \cap \{x \in l_2 : (x, z(\varphi)) \leq 3/4\} \quad 0 < \varphi \leq \pi/2;$$

$$A(0) = R; \quad A(\pi - \varphi) = A(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2; \quad A(\varphi + \pi) = -A(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi;$$

$$S' = \overline{\text{co}} \bigcup_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} [y(\varphi) + A(\varphi)].$$

Рассмотрим в l_2 следующую норму, эквивалентную исходной:

$$\|x\|_{S'} = \inf_{x \in \lambda S'} |\lambda|.$$

Обозначим через X пространство l_2 с нормой $\|x\|_{S'}$. Тогда в рефлексивном пространстве X метрическая проекция на подпространство дефекта два $\{x = \{\xi_i\} \in X : \xi_1 = \xi_2 = 0\}$ полунепрерывна снизу, но не является H -полунепрерывной снизу.

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького
Свердловск

Поступило
1 IV 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. П. Власов, УМН, т. 28, 174, № 6 (1973). ² Н. В. Ефимов, С. Б. Стечкин, ДАН, т. 118, № 1, 17 (1958). ³ Е. В. Ошман, ДАН, т. 185, № 1, 34 (1959). ⁴ Е. В. Ошман, Матем. сб. 80 (122), № 2, 181 (1969). ⁵ Е. В. Ошман, Канд. дисс., Свердловск, 1970. ⁶ V. L. Klee, Math. Ann., v. 142, N 3, 292 (1961). ⁷ E. A. Michael, Trans. Am. Math. Soc., v. 71, 152 (1951).