

Ю. П. ГОРЬКОВ

ФОРМУЛА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 25 II 1975)

Настоящая заметка посвящена решению следующей краевой задачи: требуется найти непрерывную и ограниченную в области $E\{x \leq 0, -\infty < y < \infty\}$ функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую при $x < 0$ уравнению

$$Lu = u_{yy} - yu_x = f(x, y) \quad (1)$$

и совпадающую с функцией $\varphi(y)$ при $x=0, y \leq 0$.

Уравнение (1) встречается при исследовании броуновского движения, оно изучалось в работах ⁽¹⁻³⁾ в связи с различными математическими задачами. Отметим также, что уравнение (1) относится к классу гипоеллиптических уравнений второго порядка; краевые задачи для таких уравнений исследовались в работах ^(4, 5).

Пусть выполнены условия:

- 1) $\sup_{x, y} |f(x, y)| < \infty, (x, y) \in E$;
- 2) $f(x, y) \in C^{\alpha, \beta}(E), 1/3 < \alpha, 0 < \beta$;
- 3) $\int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| (x^2 + y^2) dx dy < \infty$;
- 4) $\varphi(y)$ — непрерывная функция, $|\varphi(y)| < C_0(1 + |y|^\delta)$, где $C_0 > 0, 0 \leq \delta < 1/2$.

Положим

$$\Phi(x, y, \xi, \eta) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{t^2} \exp \left\{ -\frac{(y-\eta)^2}{4t} - \frac{3}{t^3} \left(x - \xi + \frac{y+\eta}{2} t \right)^2 \right\} dt.$$

Так как функция

$$z(x, y) = - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \Phi(x, -y, \xi, -\eta) d\xi d\eta$$

удовлетворяет уравнению (1) и условию 4) (при $x=0$), то решение указанной задачи достаточно выписать при $f(x, y) \equiv 0$.

Обратимся к выводу формулы для решения задачи. Пусть $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) при $f(x, y) \equiv 0$ и граничному условию

$$u(0, y) = \varphi(y), \quad y \leq 0. \quad (2)$$

Интегрируя обе части тождества $\Phi(x, y, \xi, \eta) Lu = 0$ по области $x < 0, -\infty < y < \infty$, получим равенство

$$u(\xi, \eta) + \int_{-\infty}^{\infty} y u(0, y) \Phi(0, y, \xi, \eta) dy = 0. \quad (3)$$

Если в этом равенстве устремить ξ к -0 , обозначить $u(0, \eta)$ через $\mu(\eta)$ и воспользоваться соотношением

$$\Phi(0, y, 0, \eta) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{1}{y^2 + y\eta + \eta^2},$$

то для $\mu(\eta)$ получим следующее уравнение:

$$\mu(\eta) + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\tau}{\tau^2 + \tau + 1} \mu(\eta\tau) d\tau = f_0(\eta), \quad f_0(\eta) = - \int_{-\infty}^0 y \varphi(y) \Phi(0, y, 0, \eta) dy. \quad (4)$$

Решение уравнения (4) находится в явном виде. Действительно, применяя к левой и правой частям уравнения (4) преобразование Меллина, получим

$$\bar{\mu}(s) + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\tau}{\tau^2 + \tau + 1} \left[\int_0^\infty \mu(\eta\tau) \eta^{s-1} d\eta \right] d\tau = \bar{f}_0(s) \\ \left(\bar{\mu}(s) = \int_0^\infty \mu(\eta) \cdot \eta^{s-1} d\eta \right).$$

Отсюда следует, что

$$\bar{\mu}(s) + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \bar{\mu}(s) \int_0^\infty \frac{\tau^{1-s}}{\tau^2 + \tau + 1} d\tau = \bar{f}_0(s).$$

Пусть $s = 1 + i\gamma$, $-\infty < \gamma < \infty$. Тогда

$$\int_0^\infty \frac{\tau^{1-s}}{\tau^2 + \tau + 1} d\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{1}{1 + 2 \operatorname{ch}^2 \frac{2}{3}\pi\gamma},$$

а

$$\bar{\mu}(s) = \bar{f}_0(s) - \frac{1}{4} \bar{f}_0(s) \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{3}\pi(1-s)}. \quad (5)$$

Применяя к обеим частям (5) обратное преобразование Меллина, получим

$$\mu(\eta) = f_0(\eta) - \frac{1}{8\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \bar{f}_0(s) \frac{\eta^{-s}}{\cos^2 \frac{1}{3}\pi(1-s)} ds.$$

Если теперь воспользоваться формулой (13) из (7), стр. 269, и учесть, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{\eta^{-s}}{\cos^2 \frac{1}{3}\pi s} ds = \frac{3}{2\pi i} \eta^{3/4} \int_{5/6-i\infty}^{5/6+i\infty} \frac{\eta^{-3\gamma}}{\sin^2 \pi\gamma} d\gamma = \frac{9}{\pi^2} \eta^{3/2} \frac{\ln \eta}{\eta^3 - 1}$$

(см. (20) в (7), стр. 302), то получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \bar{f}_0(s) \frac{\eta^{-s}}{\cos^2 \frac{1}{3}\pi(1-s)} ds = \frac{9}{\pi^2} \int_0^\infty f_0(\eta\rho) \rho^{3/2} \frac{\ln \rho}{\rho^3 - 1} d\rho.$$

Следовательно,

$$\mu(\eta) = f_0(\eta) - \frac{9}{4\pi^2} \int_0^\infty f_0(\eta\rho) \frac{\rho^{3/2} \ln \rho}{\rho^3 - 1} d\rho. \quad (6)$$

Выражению (6) можно придать более простой вид, если воспользоваться равенством

$$\int_0^\infty \frac{1}{y^2 + y\eta\rho + \eta^2\rho^2} \cdot \frac{\rho^{3/2} \ln \rho}{\rho^3 - 1} d\rho = \frac{4\pi^2}{9} \frac{1}{y^2 + y\eta + \eta^2} + \frac{4\pi^2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{|y|^{1/2} \eta^{1/2}}{y^3 - \eta^3}$$

при этом вместо $f_0(\eta)$ нужно подставить ее значение (см. выше).

Окончательно имеем

$$\mu(\eta) = \frac{3}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tau^{3/2}}{\tau^3 + 1} \varphi(-\tau\eta) d\tau. \quad (7)$$

Соотношения (3) и (7) приводят к следующей формуле решения задачи (1), (2) (при $f(x, y) \equiv 0$):

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^0 \gamma \Phi(\gamma) G(x, y, \gamma) d\gamma, \quad (8)$$

где

$$G(x, y, \gamma) = \frac{3}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tau^{3/2}}{\tau^3 + 1} \Phi(0, -\tau\gamma, x, y) d\tau - \Phi(0, \gamma, x, y). \quad (9)$$

Функция $u(x, y)$, заданная равенством (8), действительно удовлетворяет уравнению (1). Это непосредственно следует из того, что $L\Phi(\xi, \eta, x, y) = 0$ при $x \neq \xi$. Для обоснования формулы (8) необходимо еще проверить, что $u(x, y) \rightarrow \varphi(y_0)$ при $x \rightarrow -0$, $y \rightarrow y_0$ ($y_0 \leq 0$). Это можно сделать, если воспользоваться равенством: $G(0, y, \gamma) \equiv 0$ при $y < 0$, $\gamma < 0$.

Выпишем формулу решения задачи (1), (2):

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^0 \gamma \Phi(\gamma) G(x, y, \gamma) d\gamma - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \left[\Phi(x, y, \xi, \eta) - \int_{-\infty}^0 \gamma \Phi(0, \gamma, \xi, \eta) G(x, y, \gamma) d\gamma \right] d\xi d\eta. \quad (10)$$

Если $f(x, y)$ определена на всей плоскости и при $x \geq 0$ удовлетворяет тем же условиям, что и при $x \leq 0$ (см. 1) — 3)), то решение задачи (1), (2) можно продолжить на правую полуплоскость через полюсь $y \geq 0$. Формула решения задачи на плоскости с разрезом: $x = 0$, $y \leq 0$, выписывается аналогично.

Пусть теперь $f(x, y) \equiv 0$ и $\varphi(y) = |y|^\delta$, $0 < \delta < 1/2$. Можно показать, что решение задачи (1), (2) в этом случае имеет вид

$$u(x, y) = \bar{\mu}(x, y) (|x|^{\delta/3} + y^\delta),$$

где $0 < \mu_0 \leq \bar{\mu}(x, y) \leq M_1$ ($x \leq 0$, $-\infty < y < \infty$). Отсюда легко следует, что в классе функций, растущих не быстрее чем $M(|x|^{\delta/3} + |y|^\delta)$, задача (1), (2) имеет единственное решение.

Остановимся теперь на асимптотике функции $G(x, y, \gamma)$ при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ и конечном γ . Предварительно заметим, что если $\varphi(y) = c_1/y + c_2/y^2 + O(1/y^3)$ при $y \rightarrow -\infty$, то

$$\mu(y) = -c_1/2y + c_2/y^2 + O(1/y^{3/2}) \quad \text{при } y \rightarrow +\infty$$

(см. (7)). Далее, если $\varphi(y) = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + O(y^4)$ при $y \rightarrow -0$, то

$$\mu(y) = \frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|^{3/2}} d\xi \cdot y^{1/2} + a_1 y - \frac{a_2}{2} y^2 + a_3 y^3 + O(y^{7/2})$$

при $y \rightarrow +0$.

Учитывая эти формулы, легко получить для функции $G(x, y, \gamma)$ представление

$$G(x, y, \gamma) = \frac{3}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\Phi(0, v, \theta, 1) - \Phi(0, 0, \theta, 1)}{v^{3/2}} dv + \frac{|\gamma|^{1/2}}{y^{3/2}} + O\left(\frac{1}{u^4}\right)$$

при $y > 0$, $|\theta| \leq \theta_0$, $\theta = x/y^2$;

$$G(x, y, \gamma) = \frac{3}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\Phi(1, v, 0, s) - \Phi(1, 0, 0, s)}{v^{3/2}} dv \frac{|\gamma|^{1/2}}{|x|^{3/2}} + O\left(\frac{1}{|x|^{4/3}}\right)$$

при $|s| \leq s_0$, $s = y/|x|^{1/2}$;

$$G(x, y, \gamma) = \frac{3}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\Phi(0, v, r, -1) - \Phi(0, 0, r, -1)}{v^{3/2}} dv \frac{|\gamma|^{1/2}}{|y|^{3/2}} + O\left(\frac{1}{y^4}\right)$$

при $y < 0$, $|r| \leq r_0$, $r = x/|y|^2$; $\gamma < 0$, $|\gamma| \leq \gamma_0$, $x \leq 0$.

В заключение остановимся кратко на вероятностном смысле полученных результатов, ограничиваясь для простоты однородной задачей ($f(x, y) \equiv 0$). Для более естественной вероятностной интерпретации удобно задачу (1), (2) записать в виде

$$L_1 u \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x < 0, \quad -\infty < y < \infty, \\ u|_{y>0, x=0} = \varphi(-2^{1/2}y) \equiv \varphi_1(y). \quad (1')$$

Оператор L_1 представляет собой дифференциальный производящий оператор двумерного марковского процесса, описываемого системой стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dX(t) &= Y(t) dt, \\ dY(t) &= d\omega(t), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\omega(t)$ — стандартный винеровский процесс. Из общей теории марковских процессов легко получить вероятностное представление решения задачи (1'). Точнее, если обозначить $M_{x,y}(\cdot)$ математическое ожидание, отвечающее решению системы (11) с начальным условием $X(0) = x$, $Y(0) = y$, то (см. (6))

$$u(x, y) = M_{x,y} \varphi_1(Y(\tau)) = \int_0^\infty p(x, y, \gamma) \varphi_1(\gamma) d\gamma, \quad (12)$$

где $p(x, y, \gamma) \Delta\gamma = P_{x,y}\{Y(\tau) \in [\gamma, \gamma + \Delta\gamma]\} + o(\Delta\gamma)$ при $\Delta\gamma \rightarrow 0$, а τ — момент первого выхода траектории процесса (11) на полупрямую $y > 0$.

Из представлений (8) и (12) следует, что

$$p(x, y, \gamma) = -4^{1/2} \gamma G(x, -2^{1/2}y, -2^{1/2}\gamma).$$

Выражаю благодарность А. М. Ильину за внимание к работе и ценные замечания.

Институт математики и механики
Уральского научного центра
Академии наук СССР
Свердловск

Поступило
25 XII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Н. Колмогоров, Ann. Math., v. 35, 416 (1934). ² G. E. Uhlenbeck, L. S. Ornstein, Phys. Rev., v. 36, 823 (1930). ³ С. Чандрасекар, Стохастические проблемы в физике и астрономии, М., ИЛ, 1947. ⁴ О. А. Олейник, Е. А. Радкевич, Математический анализ, М., 1971. ⁵ М. Derridi, C. R., 1 A—11 (1969). ⁶ Е. Б. Дынкин, Марковские процессы, М., 1963. ⁷ Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Таблицы интегральных преобразований, т. 1, М., «Наука», 1969.