

УДК 51.01 : 518.5

МАТЕМАТИКА

К. М. ПОДНИЕКС

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ СИНТЕЗ НУМЕРОВАННЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 III 1975)

1. Начиная с работы Э. М. Голда ⁽¹⁾, изучается следующая дискретная модель индуктивного вывода: по данной последовательности значений

$$\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(m), \dots$$

требуется построить программу, вычисляющую функцию φ .

Информация, заключенная в первых m значениях $\varphi(x)$, позволяет, вообще говоря, построить лишь некоторую программу — гипотезу h_m . Задача считается решенной, если последовательность $\{h_m\}$ стабилизируется на верной гипотезе, т. е. на программе функции φ . Согласно ⁽¹⁾, невозможна единая эффективная стратегия, решающая эту задачу для всех общерекурсивных функций. С другой стороны ⁽¹⁾, для каждого эффективно перечислимого класса общерекурсивных функций такую стратегию построить можно. В работах ⁽²⁻⁴⁾ изучалось необходимое число исправлений гипотезы h_m при синтезе программ для функций, взятых из эффективно перечислимых классов; использовались в основном детерминированные стратегии. В настоящей работе рассматривается вероятностный синтез. Получена асимптотически точная оценка необходимого числа исправлений гипотезы.

2. Через N обозначим множество всех натуральных чисел, N^* — множество всех конечных кортежей натуральных чисел.

Нумерованным классом (U, τ) называется эффективно перечислимый класс U общерекурсивных функций вместе с некоторой вычислимой его нумерацией τ .

Детерминированной стратегией (или Д-стратегией) называется любое отображение типа $N^* \rightarrow NU\{\infty\}$. Особо выделяются общерекурсивные и частично-рекурсивные стратегии (тогда ∞ соответствует «значение не определено»). Пусть F — Д-стратегия, φ — всюду определенная функция (типа $N \rightarrow N$). Значения $F(\varphi(0) \dots \varphi(m))$ при $m=0, 1, 2, \dots$ будем называть гипотезами. Гипотеза n верна (относительно φ и нумерации τ), если $\tau_n = \varphi$. Говорят, что Д-стратегия F синтезирует (в пределе) τ -номер функции φ , если

$$(\exists n) (\tau_n = \varphi \wedge (\exists m_0 \forall m > m_0) F(\varphi(0) \dots \varphi(m)) = n).$$

«Трудность» синтеза характеризуется числом исправлений гипотезы, т. е.

$$\text{card}\{m | F(\varphi(0) \dots \varphi(m)) \neq F(\varphi(0) \dots \varphi(m+1))\}.$$

Для каждого нумерованного класса (U, τ) легко построить общерекурсивную Д-стратегию, которая синтезирует в пределе τ -номер любой функции $\varphi \in U$ и при этом на функции τ_n исправляет гипотезу не более n раз. Следующий результат Я. М. Барздиня ^(2, 3) показывает, что порядок этой оценки (в общем случае) нельзя понизить: существует нумерованный класс (U, τ) такой, что для каждой частично-рекурсивной Д-стратегии F , синтезирующей τ -номер любой функции класса U , найдется такая

константа $c > 0$, что для бесконечно многих n стратегия F на функции τ_n исправляет гипотезу более n/c раз.

3. В ⁽²⁾ утверждается, что использование вероятностных стратегий (вместо детерминированных) позволяет улучшить порядок оценки числа исправлений гипотезы до $\log n$. В настоящей работе получена асимптотически точная оценка $\ln n$.

Вероятностные стратегии (или В-стратегии) представляют собой модификацию вероятностных машин де Леу, Мура и др. ⁽⁵⁾. Фиксирован бернуллиевский датчик какого-либо распределения $(p, 1-p)$, где $0 < p < 1$. Этот датчик подключается к детерминированным устройствам. В результате работа последних становится вероятностной и имеет смысл говорить о вероятности того, что работа данного устройства удовлетворяет определенным условиям.

Рассмотрим следующую машину Тьюринга M , работающую с фиксированным бернуллиевским датчиком. Имея на входе последовательность значений

$$\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(m), \dots,$$

эта машина печатает на выходе пустую, конечную или бесконечную последовательность натуральных чисел (гипотез):

$$h_0, h_1, \dots, h_m, \dots,$$

причем h_m зависит только от значений $\varphi(0) \dots \varphi(m)$. Очевидно, каждой бесконечной реализации работы бернуллиевского датчика соответствует вполне определенная работа машины M в качестве детерминированной стратегии. В этом и заключается понятие рекурсивной вероятностной стратегии.

Это понятие легко обобщить, используя вместо машин Тьюринга произвольные «черные ящики». Получается общее понятие вероятностной стратегии, не зависящее от вычислимости.

$P\{M, \varphi, \leq k\}$ — вероятность того, что В-стратегия M на функции φ исправляет гипотезу не более k раз;

$P\{M, \varphi, \tau\}$ — вероятность того, что M синтезирует в пределе τ -номер функции φ .

Теорема 1. Для любого нумерованного класса (U, τ) можно построить рекурсивную В-стратегию M такую, что $P\{M, \varphi, \tau\} = 1$ для всех $\varphi \in U$ и при $n \rightarrow \infty$

$$P\{M, \tau_n, \leq \ln n + \sqrt{\log n \log \log n}\} \rightarrow 1.$$

Теорема 2. Можно построить нумерованный класс (U, τ) такой, что для любой рекурсивной В-стратегии M , если $P\{M, \varphi, \tau\} = 1$ для всех $\varphi \in U$, то найдется возрастающая последовательность $\{n_k\}$ такая, что при $k \rightarrow \infty$

$$P\{M, \tau_{n_k}, \leq \ln n_k - \sqrt{\log n_k \log \log n_k}\} \rightarrow 0.$$

4. Пусть даны некоторые M, φ, τ . Рассмотрим одно достаточное условие для $P\{M, \varphi, \tau\} = 1$. Введем обозначения: $M(\varphi, m)$ — случайная величина «гипотеза В-стратегии M , соответствующая значениям $\varphi(0) \dots \varphi(m)$ ».

$P_m\{M, \varphi\}$ — вероятность того, что В-стратегия на шаге M исправляет гипотезу, т. е. $P\{M(\varphi, m) \neq M(\varphi, m+1)\}$.

Будем говорить, что В-стратегия M τ -регулярна на функции φ , если для всех m :

а) $M(\varphi, m) \in N$ с вероятностью 1;

б) если $P\{M(\varphi, m) = n\} > 0$, то $\tau_n(x) = \varphi(x)$ для всех $x \leq m$.

Легко видеть, что если В-стратегия M τ -регулярна на функции φ , то $\sum_m P_m\{M, \varphi\} < \infty$ влечет $P\{M, \varphi, \tau\} = 1$.

Таким образом, в случае регулярной В-стратегии факт τ -синтеза можно установить через оценку суммы вероятностей исправления гипотезы.

5. Верхняя оценка $\ln n$ доказывается с помощью В-стратегии Барздяня — Фрейвалда. Основные трудности возникают, однако, не при построении стратегии, а при ее исследовании.

Пусть (U, τ) — нумерованный класс всюду определенных функций. Берется некоторое распределение вероятностей $\{\pi_n | n \in N\}$, где $\pi_n > 0$ для всех n и $\sum \pi_n = 1$. Через $M_{\tau\pi}$ обозначим следующую τ -регулярную В-стратегию:

если множество $\mathfrak{A}_0 = \{n | \tau_n(0) = \varphi(0)\}$ пусто, то $M_{\tau\pi}(\varphi, 0) = \infty$ с вероятностью 1;

если же $\mathfrak{A}_0$ непусто, полагаем для каждого $n \in \mathfrak{A}_0$: $M_{\tau\pi}(\varphi, 0) = n$ с вероятностью π_n/σ , где $\sigma = \sum \{\pi_n | n \in \mathfrak{A}_0\}$.

Допустим, что гипотезы $M_{\tau\pi}(\varphi, x)$ уже определены при $x < m$ и гипотеза $M_{\tau\pi}(\varphi, m-1) = p$. Если $p = \infty$, то и $M_{\tau\pi}(\varphi, m) = \infty$ с вероятностью 1. Если $p \in N$ и $\tau_p(m) = \varphi(m)$ (т. е. гипотеза p еще не устарела), полагаем $M_{\tau\pi}(\varphi, m) = p$ с вероятностью 1. Пусть теперь $\tau_p(m) \neq \varphi(m)$.

Берем множество всех подходящих (пока) гипотез, т. е.

$$\mathfrak{A}_m = \{n | (\forall x \leq m) \tau_n(x) = \varphi(x)\}.$$

Если $\mathfrak{A}_m$ пусто, полагаем $M_{\tau\pi}(\varphi, m) = \infty$ с вероятностью 1.

Если $\mathfrak{A}_m$ непусто, полагаем для всех $n \in \mathfrak{A}_m$: $M_{\tau\pi}(\varphi, m) = n$ с вероятностью π_n/σ , где $\sigma = \sum \{\pi_n | n \in \mathfrak{A}_m\}$.

Лемма 1.

$$\sum_n P_m\{M, \tau_n\} \leq \ln \frac{1}{\pi}.$$

Отсюда следует, что при любом выборе распределения π (соблюдающем условие: $\pi_n > 0$ для всех n) В-стратегия $M_{\tau\pi}$ с вероятностью 1 синтезирует τ -номер любой функции класса U .

Лемма 2. Пусть фиксирована функция $\varphi \in U$. Тогда независимы события

$$A_m = \{M_{\tau\pi}(\varphi, m) \neq M_{\tau\pi}(\varphi, m+1)\}, \quad m=0, 1, 2, \dots$$

Любопытно отметить, что события A_m (т. е. «на шаге m стратегия $M_{\tau\pi}$ исправляет гипотезу») не обнаруживают никаких содержательных признаков независимости. Формальному критерию независимости они тем не менее удовлетворяют.

Если выбрать (считая, что $1/0=1$ и $\ln 0=1$):

$$\pi_n' = \frac{c}{n(\ln n)^2},$$

то по лемме 1 сумма вероятностей исправления гипотезы у стратегии $M_{\tau\pi'}$ на функции τ_n будет не более $\ln n + \log \log n$. Лемма 2 позволяет вывести отсюда, что при $n \rightarrow \infty$

$$P\{M_{\tau\pi'}, \tau_n, \leq \ln n + \sqrt{\log n \log \log n}\} \rightarrow 1.$$

Легко видеть, что если τ -вычислимая нумерация, то В-стратегия $M_{\tau\pi'}$ рекурсивна.

6. Нижняя оценка $\ln n$ опирается на следующую лемму 3. Пусть $\{X_j\}$ — последовательность независимых случайных величин такая, что

$$P\{X_j=1\} = \frac{1}{j}, \quad P\{X_j=0\} = 1 - \frac{1}{j}.$$

Можно показать, что при $n \rightarrow \infty$

$$P\left\{\sum_{j=2}^n X_j \geq \ln n - \sqrt{\log n \log \log n}\right\} \rightarrow 1.$$

Лемма 3. Пусть $\mathcal{M}$ — вероятностная машина, k, n — натуральные числа, $k < n$, ε — рациональное число, $\varepsilon > 0$. Можно построить набор n функций $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ такой, что если $\mathcal{M}$ реализует B -стратегию, которая с вероятностью 1 синтезирует σ -номер любой функции набора, то на одной из этих функций $\mathcal{M}$ исправляет гипотезу $\geq k$ раз с вероятностью

$$\geq (1-\varepsilon)P\left\{\sum_{j=2}^n X_j \geq k\right\}.$$

Пусть $\{\mathcal{M}_i\}$ — эффективная нумерация всех вероятностных машин. Каждой паре (i, s) сопоставим набор функций из леммы 3 для $\mathcal{M}=\mathcal{M}_i$, $n=2^s$, $k=s \ln 2 - \sqrt{s} \log s$, $\varepsilon=2^{-s}$. Следуя методу ⁽¹⁾ (см. теорему 4), из таких наборов складывается вычислимая нумерация τ , доказывающая теорему 2.

Вычислительный центр
Латвийского государственного университета
им. П. Стучки
Рига

Поступило
12 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ E. M. Gold, J. Symbolic Logic, v. 30, № 1, 28 (1965). ² Я. М. Барздинь, Р. В. Фрейвалд, ДАН, т. 206, № 3, 521 (1972). ³ Я. М. Барздинь, Уч. зап. Латвийск. гос. ун-ва, т. 210, 112 (1974). ⁴ Я. М. Барздинь, Р. В. Фрейвалд, Там же, стр. 101. ⁵ К. де Леу, Э. Ф. Мур и др., Сб.: Автоматы, ИЛ, 1956, стр. 242.