

АРИФ С. ДЖАФАРОВ

# О КЛАССАХ ФУНКЦИЙ НА ГИПЕРСФЕРЕ, ДОПУСКАЮЩИХ ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

(Представлено академиком С. М. Никольским 7 III 1975)

Пусть  $S^k$ ,  $k \geq 3$ , — единичная сфера  $k$ -мерного евклидова пространства,  $C(S^k)$  — пространство непрерывных на  $S^k$  функций. Для каждой функции  $f \in C(S^k)$  обозначим через  $\{f(x)\}_h$  ее среднее значение вдоль окружности с центром в точке  $x$  со сферическим радиусом  $h$  на  $S^k$ :

$$\{f(x)\}_h = \frac{1}{|S^{k-1}| \sin^{k-2} h} \int_{(x,y)=\cos h} f(y) dt(y), \quad (1)$$

где  $(x, y)$  — скалярное произведение единичных векторов  $x$  и  $y$ ,  $|S^{k-1}|$  — полная поверхность единичной сферы  $S^{k-1}$ .

Пусть, далее,  $D$  — оператор Лапласа на сфере  $S^k$ , т. е. угловая часть оператора Лапласа в  $k$ -мерном евклидовом пространстве, записанного в сферических координатах. Будем говорить, что функция  $f$  принадлежит классу  $H^{(p, \psi)}(M)$ , если к функции  $f$  применим  $p$  раз оператор Лапласа  $D$ ,  $D^p f \in C(S^k)$  и

$$\|D^p f - \{D^p f\}_h\|_{C(S^k)} \leq M \psi(h),$$

где  $\psi(h)$  — некоторая монотонно стремящаяся к нулю функция.

**Теорема 1.** Пусть  $f_n \in H^{(p, \psi)}(M_n)$  и для некоторой функции  $f \in C(S^k)$ .

$$\|f - f_n\|_{C(S^k)} \leq \varepsilon_n,$$

где  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Если  $M_n \leq M$ , функция  $\psi(h)$  удовлетворяет  $(B_2)$ -условию Н. К. Бари <sup>(1)</sup>, а функция  $h^{2(p-s)}\psi(h)$ , при некотором натуральном  $s \leq p$ ,  $(\mathfrak{E}_2)$ -условию С. М. Лозинского <sup>(1)</sup>, то к функции  $f$  применим  $s$  раз оператор Лапласа  $D$ ,  $D^s f \in C(S^k)$ , кроме того,

$$\|D^s f - D^s f_n\|_{C(S^k)} \leq C_1 \varepsilon_n^{-2\alpha s} \left\{ \varepsilon_n + \left[ \frac{1}{\varepsilon_n} \right]^{-2\alpha p} \psi \left( \left[ \frac{1}{\varepsilon_n} \right]^{-2\alpha} \right) \right\}, \quad (2)$$

где  $0 < \alpha < 1/(2s)$ ,  $[\gamma]$  — целая часть  $\gamma$ ,  $C_1$  — не зависящая от  $n$  постоянная.

Заметим, что в силу сделанных предположений правая часть неравенства (2) стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

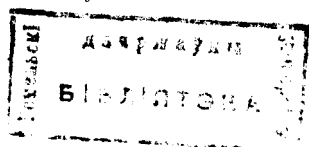
**Примечание 1.** Аналогичная теорема установлена и в случае, когда  $f_n \in H^{(p, \psi_n)}(M_n)$ , где функции  $\psi_n(h)$ , вообще говоря, различны для различных  $n$ .

**Примечание 2.** В случае непрерывных на отрезке  $[-1, 1]$  функций. т. е. пространства  $C[-1, 1]$ , также имеет место такая теорема, где роль оператора Лапласа  $D$  играет оператор Лежандра

$$\tilde{D} = \frac{d}{dx}(1-x^2) \frac{d}{dx},$$

а роль  $\{f(x)\}_h$  — величина

$$\tilde{f}_h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x \cos h + \sqrt{1-x^2} \sin h \cos \theta) d\theta.$$



Рассмотрим семейство линейных интегральных операторов вида

$$L_n(f; x) = \frac{1}{|S^k|} \int_{S^k} f(y) K_n(x, y) dS(y), \quad (3)$$

действующих над функциями, заданными на сфере  $S^k$ ; ядро  $K_n(t)$  удовлетворяет условию: существует постоянная  $K$  такая, что

$$\int_{-1}^1 |K_n(t)| (1-t^2)^{\lambda-1/2} dt < K, \quad \lambda = (k-2)/2. \quad (4)$$

**Теорема 2.** Если функция  $f \in C(S^k)$  допускает применение оператора Лапласа  $D$  и результат применения ограничен  $|Df| \leq M$ , то

$$\Delta_n(f) = \|f - L_n(f)\|_{C(S^k)} \leq C_2 M \delta_n,$$

$$\delta_n = \int_{-1}^1 |K_n(t)| (1-t) (1-t^2)^{\lambda-1/2} dt,$$

$C_2$  — не зависящая от  $n$  постоянная.

**Примечание 3.** Теорема 2 есть частный случай более общей теоремы, в которой устанавливается, что  $\Delta_n(f)$  есть  $O(1) \Omega_f(\sqrt{\delta_n})$ , где  $\Omega_f(\delta)$  — так называемый сферический модуль непрерывности функции  $f$ , введенный нами в (2).

В том случае, когда

$$K_n(t) = \sum_{\nu=0}^n \rho_{\nu}^{(n)} \left( \frac{\nu}{\lambda} + 1 \right) P_{\nu}^{(\lambda)}(t), \quad (5)$$

где  $P_{\nu}^{(\lambda)}(t)$  — ультрасферический полином порядка  $\nu$  с индексом  $\lambda = (k-2)/2$ , а  $\rho_{\nu}^{(n)}$  — некоторая треугольная матрица чисел с  $\rho_1^{(n)} = 1$ , при условии положительности  $K_n(t) \geq 0$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ , можно легко показать, что  $\delta_n = O(1 - \rho_1^{(n)})$ . Поэтому, из теоремы 2 вытекает

**Следствие 2.1.** Если операторы  $L_n(f; x)$  с ядром  $K_n(t)$ , имеющие вид (5), положительны, то для любой функции  $f \in C(S^k)$ , допускающей применения оператора Лапласа  $D$  и  $|Df| \leq M$ ,

$$\Delta_n(f) \leq C_3 M (1 - \rho_1^{(n)}). \quad (6)$$

Заметим, что суммы Чезаро  $\sigma_n^{(\alpha)}(f; x)$   $k$ -мерного ряда Лапласа при  $\alpha \geq k-1$ , обобщенный оператор Д. Джексона (2)  $D_n^{[m]}(f; x)$  для сферы  $S^k$  при  $m > (k+1)/2$ , оператор Валле — Пуссена  $V_n(f; x)$  для сферы  $S^k$  с ядром

$$\frac{\Gamma(n+2\lambda+1)}{2^{2\lambda+1} \pi^{\lambda+1/2} \Gamma(n+\lambda+1/2)} \left( \frac{1+t}{2} \right)^n, \quad \lambda = \frac{k-2}{2},$$

являются операторами вида  $L_n(f; x)$ , ядра которых положительны и представимы в виде (5). Для этих операторов  $1 - \rho_1^{(n)}$  есть  $O(1/n)$ ,  $O(1/n^2)$ ,  $O(1/n)$  соответственно.

Ниже, во всех теоремах,  $L_n(f; x)$  будут означать операторы, ядра которых имеют вид (5), т. е. линейные полиномиальные операторы на  $S^k$ .

Следующая теорема показывает, что для некоторого класса линейных положительных полиномиальных операторов  $L_n(f; x)$  оценка (6) не может быть улучшена в смысле порядка. Кроме того из этой теоремы следует, что при приближении функции  $f$  операторами этого класса, порядок приближения не выше  $1 - \rho_1^{(n)}$ , каким бы хорошим свойством ни обладала функция  $f$ .

Теорема 3. Если линейные полиномиальные операторы  $L_n(f; x)$  положительны, т. е.  $K_n(t) \geq 0$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \rho_2^{(n)}}{1 - \rho_1^{(n)}} = \frac{4(1 + \lambda)}{1 + 2\lambda}, \quad (7)$$

то для любой функции  $f \in L(S^k)$  имеет место соотношение

$$f - L_n(f; x) = 1/2(1 - \rho_1^{(n)}) D^* f(x) + o(1 - \rho_1^{(n)}),$$

справедливое в каждой точке  $x \in S^k$ , в которой существует конечный обобщенный лапласиан

$$D^* f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - \{f(x)\}_h}{\sin^2 1/2 h},$$

где  $\{f(x)\}_h$  — среднее значение функции  $f$ , определяемое по формуле (1).

Теорема 4. Если линейные полиномиальные операторы  $L_n(f; x)$  положительны, то для того чтобы имело место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n(f_1; x) - f_1(x)}{L_n(f_2; x) - f_2(x)} = \frac{D^* f_1(x)}{D^* f_2(x)},$$

справедливое для любых функций  $f_1, f_2 \in L(S^k)$ , имеющих в точке  $x \in S^k$  конечные обобщенные лапласианы  $D^* f_1(x)$  и  $D^* f_2(x)$ , необходимо и достаточно, чтобы было верно равенство (7).

Заметим, что названные выше операторы Джексона  $D_n^{[m]}(f; x)$  и Валле — Пуссена  $V_n(f; x)$  входят в класс операторов, рассмотренных в теоремах 3, 4, т. е. эти операторы доставляют линейный метод суммирования ряда Лапласа функции  $f \in L(S^k)$  с матрицей чисел, удовлетворяющих условию (6).

Теперь приведем теоремы о сходимости последовательности линейных операторов, действующих над функциями, заданными на сфере  $S^k$ .

В работе С. М. Никольского <sup>(3)</sup>, посвященной линейным методам суммирования тригонометрических рядов Фурье, из общей теоремы функционального анализа о слабой сходимости линейных функционалов была выведена теорема, устанавливающая критерий сходимости последовательности линейных операторов, порожденных указанными методами суммирования. Точно так же устанавливается следующая теорема в случае рядов Фурье по  $k$ -мерной сферической системе функций, т. е.  $k$ -мерных рядов Лапласа.

Теорема 5. Пусть  $L_n(f; x)$  — операторы, ядра которых имеют вид (5). Для того чтобы для любой функции  $f \in C(S^k)$  равномерно на  $S^k$  было

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f; x) = f(x), \quad (8)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_k^{(n)} = 1, \quad k=1, 2, \dots, \quad (9)$$

и выполнялось неравенство (4).

Для положительных полиномиальных операторов  $L_n(f; x)$ , т. е. когда  $K_n(t) \geq 0$ , неравенство (4) следует непосредственно из ортогональности на отрезке  $[-1, 1]$  полиномов  $P_k^{(\lambda)}(t)$  с весом  $(1-t^2)^{\lambda-1/2}$ . И получаем, что для того чтобы имело место равенство (8), достаточно, чтобы имело место равенство (9). Оказывается, что в этом случае, т. е. когда ядра  $K_n(t)$  положительны, достаточно выполнения условия (9) одного лишь  $\rho_1^{(n)}$ . А именно, справедлива

Теорема 6. Если линейные полиномиальные операторы  $L_n(f; x)$  положительны и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1^{(n)} = 1$ , то для любой функции  $f$ , ограниченной на  $S^k$

и непрерывной в точке  $x \in S^k$ , справедливо равенство (8). На любом замкнутом множестве  $E \subset S^k$  точек непрерывности функции  $f$  эта сходимость равномерна.

Теорема 6 есть частный случай следующего, более общего утверждения.

Теорема 7. Пусть  $A_n(f; x)$  — последовательность произвольных линейных положительных операторов, действующих над функциями, заданными на сфере  $S^k$ . Если в точке  $x \in S^k$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(f; x) = 1; \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(\psi; x) = 0, \quad (11)$$

$$\psi(y) = \psi_x(y) = 1/2(1 - (x, y)),$$

то в этой точке  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(f; x) = f(x)$  для любой функции  $f$ , ограниченной на  $S^k$  и непрерывной в точке  $x$ . Эта сходимость равномерна на любом замкнутом множестве точек непрерывности  $f$ , если на множестве  $E$  соотношения (10) и (11) выполняются равномерно.

Следствие 7.1. Пусть  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{k-1}$  и  $\theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_{k-1}$  являются сферическими координатами точек  $x, y \in S^k$  соответственно. Если для  $k+1$  функций  $f_i$  в точке  $x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(f_i; x) = f_i(x),$$

$$f_0(x) \equiv 1, \quad f_1(x) = \cos \theta_1, \quad f_2(x) = \sin \theta_1 \cos \theta_2,$$

$$f_{k-1}(x) = \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{k-2} \cos \theta_{k-1},$$

$$f_k(x) = \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{k-2} \sin \theta_{k-1},$$

то справедливы утверждения теоремы 7.

Условиям теорем 6, 7 удовлетворяют, например, названные выше операторы  $\sigma_n^{(\alpha)}(f; x)$ ,  $D_n^{[m]}(f; x)$  и  $V_n(f; x)$ .

Теоремы 3, 4, 6, 7 и следствие 7.1 являются пространственными аналогами соответствующих теорем П. П. Коровкина<sup>(4)</sup> для 2л-периодических функций.

Азербайджанский государственный университет  
им. С. М. Кирова  
Баку

Поступило  
11 II 1975

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> Н. К. Бари, С. Б. Стечкин, Тр. Моск. матем. общ., т. 5 (1956). <sup>2</sup> Ариф С. Джафаров, ДАН т. 203, № 2 (1972). <sup>3</sup> С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 12, 259 (1948). <sup>4</sup> П. П. Коровкин, Линейные операторы и теория приближений, М., 1959.