

Академик АН ТаджССР А. ДЖУРАЕВ

О СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

1. Согласно теореме Лиувилля, не существует отличной от нуля непрерывной на всей плоскости E голоморфной функции, исчезающей на бесконечности. Однако бесконечная система функций, определенная равенствами

$$u_k(z) = \begin{cases} z^k & \text{при } |z| < 1, \\ \bar{z}^{-k} & \text{при } |z| > 1, \end{cases} \quad k=1, 2, \dots,$$

очевидно, является полной системой линейно-независимых, непрерывных на всей плоскости, исчезающих на бесконечности решений уравнения

$$K^0(u) = \text{sign}(1 - |z|) u_x + i u_y = 0, \quad (1)$$

а бесконечная система функций

$$\begin{aligned} u_k(z) &= Z_n^k(z) / W_n^{k+2}(z), \quad k=0, 1, 2, \dots, \\ Z_n(z) &= 2(n+1)x + i(y^{2(n+1)} - 2(n+1)), \\ W_n(z) &= 2(n+1)x + i(y^{2(n+1)} + 2(n+1)), \end{aligned}$$

как легко видеть, является полной системой линейно-независимых непрерывных на всей плоскости и исчезающих на бесконечности решений уравнения

$$L_n^0(u) = y^{2n+1} u_x + i u_y = 0, \quad n \geq 0 \text{ целое.} \quad (2)$$

В то время как неоднородное уравнение Коши — Римана $u_z = f(z)$ всегда разрешимо в классе $C(E)$ непрерывных на всей плоскости функций при любой правой части $f(z) \in L_{p,2}(E)$, $p > 2$, неоднородные уравнения $K^0(u) = f$, $L_n^0(u) = f$ в классе $C(E)$, вообще говоря, неразрешимы, если даже f бесконечно дифференцируема и убывает на бесконечности. А именно, имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. Уравнение $\text{sign}(1 - |z|) u_x + i u_y = f(z)$ разрешимо в классе $C(E)$ тогда и только тогда, когда $f(z)$ удовлетворяет бесконечному числу условий

$$\iint_{|z| < 1} f(z) z^k dx dy + \iint_{|z| > 1} f(z) \bar{z}^{-k-2} dx dy = 0, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Теорема 2. Уравнение $y^{2n+1} u_x + i u_y = f(z)$ разрешимо в классе $C(E)$ тогда и только тогда, когда $f(z)$ удовлетворяет бесконечному числу условий

$$\iint_E f(z) Z_n^k(z) / W_n^{k+2}(z) dx dy = 0, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Для того чтобы доказать утверждение теоремы 1, заметим, что решения класса $C(E)$ уравнения $K^0(u) = f(z)$ имеют вид

$$u(z) = \begin{cases} \varphi(z) - (2\pi)^{-1} \iint_{|\xi| < 1} f(\xi) (\xi - z)^{-1} d\xi d\eta & \text{при } |z| < 1, \\ \overline{\psi(z)} + (2\pi)^{-1} \iint_{|\xi| > 1} f(\xi) (\bar{\xi} - \bar{z})^{-1} d\xi d\eta & \text{при } |z| > 1, \end{cases}$$

где $\varphi(z)$ голоморфна в круге $|z| < 1$, а $\psi(z)$ голоморфна вне этого круга. Исходя из этой формулы, легко убеждаемся, что для непрерывности функции $u(z)$ при переходе через окружность $|t|=1$ необходимо и достаточно, чтобы функция

$$h(t) = (2\pi)^{-1} \left(\iint_{|\xi| < 1} f(\xi) (\xi - t)^{-1} d\xi d\eta + \iint_{|\xi| > 1} f(\xi) (\bar{\xi} - \bar{t})^{-1} d\bar{\xi} d\eta \right)$$

была граничным значением функции, голоморфной внутри круга $|z| < 1$, а это приводит к условиям (3). Замечая теперь, что после замены $\eta = y^{2(n+1)}/2(n+1)$ при $y > 0$ и $\eta = -y^{2(n+1)}/2(n+1)$ при $y < 0$ уравнение $L_n^0(u) = f(z)$ преобразуется к виду $u_x + i \operatorname{sign} \eta u_\eta = F(x + i\eta)$, где

$$F(x + i\eta) = \begin{cases} [(2n+2)\eta]^{-(2n+1)/(2n+2)} \cdot f(x + i[(2n+2)\eta]^{1/(2n+2)}), & \eta > 0, \\ [(2n+2)\eta]^{-(2n+1)/(2n+2)} \cdot f(x + i[-(2n+2)\eta]^{1/(2n+2)}), & \eta < 0. \end{cases}$$

Если теперь выполнить преобразование $x + i\eta = (\omega - i)/i(\omega + i)$, переводящее верхнюю полуплоскость $\eta > 0$ во внутренность круга $|\omega| < 1$, нижнюю полуплоскость $\eta < 0$ — во внешность этого круга, а ось $\eta = 0$ — в окружность $|\omega| = 1$, то получим уравнение $\operatorname{sign}(1 - |\omega|) u_\alpha + i u_\beta = g(\omega)$, где $\omega = \alpha + i\beta$, $g(\omega) = F(\omega - i/i(\omega + i))$. Применяя к последнему уравнению теорему 1, получим доказательство теоремы 2.

2. Указанные выше свойства означают, что ядра и коядра операторов K^0 и L_n^0 бесконечномерны. Возникает вопрос, нельзя ли за счет присоединения младших членов к этим операторам получить операторы с конечномерными ядрами и коядрами?

Рассмотрим уравнение

$$K(u) = \operatorname{sing}(1 - |z|) u_x + i u_y + a(z) u + b(z) \bar{u} = f(z) \quad (5)$$

с достаточно гладкими коэффициентами и правой частью, достаточно быстро убывающими на бесконечности. Наряду с (5) рассмотрим также уравнение

$$K^*(v) = -\operatorname{sign}(1 - |z|) v_x - i v_y + a(z) v + \overline{b(z)} \bar{v} = 0, \quad (6)$$

которое назовем сопряженным к (5).

Теорема 3. Если $b(t) \neq 0$ при $|t|=1$, то для разрешимости уравнения (5) в классе $C(E)$, исчезающих на ∞ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\operatorname{Re} \int_E f(z) v_j(z) dx dy = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad (7)$$

где $\{v_j(z)\}$ — полная система линейно-независимых решений уравнения (6) в классе $C(E)$, причем индекс уравнения (1) равен

$$(2/\pi) \{\arg b(t)\}_{|t|=1} - 3.$$

На самом деле, из уравнения (5) следует, что при $|z| < 1$

$$u(z) = \varphi(z) + \iint_{|\xi| < 1} [\Gamma_1^+(\xi, z) \varphi(\xi) + \Gamma_2^+(\xi, z) \overline{\varphi(\xi)}] d\xi d\eta + F^+(z), \quad (8)$$

а при $|z| > 1$

$$u(z) = \overline{\psi(z)} + \iint_{|\xi| > 1} [\Gamma_1^-(\xi, z) \overline{\psi(\xi)} + \Gamma_2^-(\xi, z) \psi(\xi)] d\xi d\eta + F^-(z), \quad (9)$$

где $\varphi(z)$ голоморфна в круге $|z| < 1$, а $\psi(z)$ голоморфна при $|z| > 1$, причем $\psi(\infty) = u(\infty) = 0$. $\Gamma_j^\pm(z)$ — соответствующие резольвентные ядра, описанные в (1), а $F^\pm(z)$ выражаются через $f(z)$.

Функцию $\varphi(z)$ можно представить в виде интеграла типа Коши с вещественной плотностью

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{|t|=1} \mu_1(t) (t-z)^{-1} dt + iC, \quad C = \bar{C} = \text{const}, \quad (10)$$

а функцию $\psi(z)$ — в виде интеграла с вещественной плотностью $\mu_2(t)$

$$\psi(z) = \frac{i}{\pi} \int_{|t|=1} z \mu_2(t) [t(t-z)]^{-1} dt. \quad (11)$$

Подставляя (10) в (8), а (11) в (9), после преобразований получим для функции $u(z)$ при $|z| < 1$

$$u(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{|t|=1} \frac{\mu_1(t) dt}{t-z} + \frac{b(z)}{\pi i} \int_{|t|=1} \bar{t} \ln \left(1 - \frac{z}{t} \right) \mu_1(t) ds + \\ + \int_{|t|=1} M(t, z) \mu_1(t) ds + F^+(z) + F^*(z) \cdot C \quad (12)$$

и для $u(z)$ при $|z| > 1$

$$u(z) = \frac{i}{\pi} \int_{|t|=1} \frac{\bar{z} \mu_2(t) dt}{1 - \bar{z}t} + \frac{zb(z)}{\pi} \int_{|t|=1} \ln \left(1 - \frac{\bar{z}}{t} \right) \mu_2(t) ds + \\ + \int_{|t|=1} N(t, z) \mu_2(t) ds + F^-(z), \quad (13)$$

где $M(t, z)$, $N(t, z)$ — достаточно гладкие функции, особенности которых при $t=z$ ниже логарифмического типа.

Так как $u(z) \in C(\bar{L})$, то, подставляя (12), (13) в условие непрерывности $u^+(t) = u^-(t)$ при переходе через окружность $|t|=1$, а затем отделяя вещественную и мнимую часть полученного соотношения, получим систему сингулярных интегральных уравнений для определения вещественных функций $\mu_j(t)$

$$\text{Re} \left\{ \mu_1(t) - \mu_2(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\mu_1(\tau) - \mu_2(\tau)}{\tau - t} d\tau + \right. \\ + \frac{\overline{b(t)}}{\pi} \int_{|\tau|=1} \tau \ln \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) \mu_1(\tau) ds - \frac{tb(t)}{\pi} \int_{|\tau|=1} \ln \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) \mu_2(\tau) ds + \\ \left. + \int_{|\tau|=1} M(\tau, t) \mu_1(\tau) ds - \int_{|\tau|=1} N(\tau, t) \mu_2(\tau) ds \right\} = \\ = \text{Re}(F^+(t) - F^-(t)) + \text{Re} F^*(t) \cdot C; \quad (14)$$

$$\text{Re} i \left\{ \mu_1(t) - \mu_2(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\mu_1(\tau) - \mu_2(\tau)}{\tau - t} d\tau - \right. \\ - \frac{b(t)}{\pi} \int_{|\tau|=1} t \ln \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) \mu_1(\tau) ds - \frac{tb(t)}{\pi} \int_{|\tau|=1} \ln \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) \mu_2(\tau) ds + \\ \left. + \int_{|\tau|=1} M(\tau, t) \mu_1(\tau) ds - \int_{|\tau|=1} N(\tau, t) \mu_2(\tau) ds \right\} = \\ = -\text{Im}(F^+(t) - F^-(t)) - \text{Im} F^*(t) \cdot C. \quad (15)$$

Система (14), (15) не является системой нормального типа, однако относительно вещественных функций $v_j(t)$, связанных с $\mu_j(t)$ равенствами $\mu_1(t) = dv_1/ds$, $\mu_2(t) = dv_1/ds - v_2(t)$, эта система преобразуется к виду

$$\operatorname{Re} \left\{ it(b(t) - \overline{b(t)}) \left(v_1(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{v_1(\tau) d\tau}{\tau - t} \right) + v_2(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{v_2(\tau) d\tau}{\tau - t} + \right. \\ \left. + \int_{|\tau|=1} [K_{11}(\tau, t) v_1(\tau) + K_{12}(\tau, t) v_2(\tau)] ds \right\} = \operatorname{Re} (F^+(t) - F^-(t)) + \operatorname{Re} F^*(t) \cdot C, \quad (16)$$

$$\operatorname{Re} \left\{ -t(b(t) + \overline{b(t)}) \left(v_1(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{v_2(\tau) d\tau}{\tau - t} \right) + i \left(v_2(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{v_2(\tau) d\tau}{\tau - t} \right) + \right. \\ \left. + \int_{|\tau|=1} [K_{21}(\tau, t) v_1(t) + K_{22}(\tau, t) v_2(\tau)] ds \right\} = \\ = -\operatorname{Im} (F^+(t) - F^-(t)) - \operatorname{Im} F^*(t) \cdot C. \quad (17)$$

Если $b(t) \neq 0$, $|t|=1$, то система (16), (17), как легко видеть, является системой нормального типа.

Записав необходимые и достаточные условия разрешимости системы (16), (17) в терминах функции $f(z)$, нетрудно убедиться в справедливости равенств (7).

Индекс уравнения (5) на единицу больше индекса системы (16), (17). Вычисляя индекс последней системы по известной формуле и учитывая конструкцию ее правой части, убеждаемся в справедливости утверждений теоремы.

Рассмотрим теперь уравнение

$$y^{2n+1}u_x + iu_y + y^{2n+1}a(z)u + y^{2n+1}b(z)\bar{u} = f(z), \quad (18)$$

а также сопряженное ему однородное уравнение

$$-y^{2n+1}v_x - i v_y + y^{2n+1}a(z)v + y^{2n+1}\overline{b(z)}\bar{v} = 0. \quad (19)$$

После преобразования $\eta = y^{2(n+1)}/(2n+2)$ при $y > 0$, $\eta = -y^{2(n+1)}/(2n+2)$ при $y < 0$ и последующего отображения $x + i\eta = \omega - i/i(\omega + i)$ мы получим уравнения вида (5) и (6) и убедимся, что справедлива

Теорема 4. Если $b(x, 0) \neq 0$, то уравнение (18) разрешимо тогда, когда ее правая часть ортогональна к решениям сопряженного уравнения (19), причем его индекс конечен и равен

$$(2/\pi) \{ \arg b(x, 0) \}^{+\infty} - 3.$$

Математический институт с Вычислительным центром
Академии наук ТаджССР
Душанбе

Поступило
3 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М., 1959. ² А. Джураев, ДАН, т. 185, № 5 (1969).