

И. В. ЕВСТИГНЕЕВ

МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ, УЧИТЫВАЮЩИЕ
НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ В ХОДЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО
ПРОЦЕССА

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 2 I 1975)

1. В последнее время предложены различные вероятностные модификации экономических моделей Д. Гейла (^{1, 2}). Одна из таких вероятностных моделей была построена Е. Б. Дынкиным (³⁻⁵) и исследовалась автором (⁶⁻⁸); модели другого типа были предложены Р. Раднером (⁹). Последние имеют перед (³⁻⁸) два преимущества: они позволяют учитывать случайные факторы, влияющие на ход производственного процесса, и включают как частный случай естественный вероятностный аналог модели Неймана (¹⁰). Однако результаты Раднера слабее соответствующих результатов (³⁻⁸) (строятся цены, стимулирующие оптимальные планы «в среднем», а не «почти наверное») и получены при более жестких ограничениях.

Цель настоящей заметки — построить модель, которая обладала бы достоинствами моделей Раднера и в которой были бы справедливы результаты о существовании цен, аналогичные (³⁻⁸). Мы ограничиваемся случаем конечного интервала планирования.

2. Начнем с описания тех результатов (относящихся к детерминистским моделям), вероятностными аналогами которых мы будем интересоваться. Пусть $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_N$ — выпуклые компактные множества, состоящие из пар неотрицательных n -мерных векторов (x, y) ; $u_i(x, y)$ — вогнутые непрерывные функции на $\mathcal{T}_i$. Пары (x, y) будем называть производственными процессами (x — затраты, y — выпуск). $\mathcal{T}_i$ — технологическими множествами, u_i — функциями полезности. Фиксируем неотрицательный n -мерный вектор y_0 (начальные ресурсы). Последовательность $\{z_t\} = \{(x_{t-1}, y_t)\}$ назовем планом, если $z_t \in \mathcal{T}_i$, $t=1, \dots, N$, и $y_t \geq x_t^*$, $t=0, \dots, N-1$. Первое условие означает, что производственные процессы z_t технологически осуществимы; второе — что затраты на каждом шаге не превосходят выпуска на предыдущем шаге. Для того чтобы существовал хотя бы один план, достаточно предположить, что $(0, 0) \in \mathcal{T}_i$. В силу непрерывности u_i и компактности $\mathcal{T}_i$ существуют планы, максимизирующие $u_1(z_1) + \dots + u_N(z_N)$; они называются оптимальными.

Теорема 1. *Предположим, что найдется план $\{(x'_{t-1}, y'_t)\}$, для которого $y'_t > x'_t$ при $t \geq 1$ и $y_0 > x'_0$.*

Тогда существуют n -мерные векторы $p_0 \geq 0, \dots, p_N \geq 0$ такие, что для любого оптимального плана $\{z_t\} = \{(x_{t-1}, y_t)\}$;

а) $u_i(x, y) + p_i y - p_{i-1} x \leq u_i(x_{i-1}, y_i) + p_i y_i - p_{i-1} x_{i-1}$ при всех $(x, y) \in \mathcal{T}_i$, $1 \leq t \leq N$;

б) $p_t(y_t - x_t) = 0$, $0 \leq t \leq N-1$.

Векторы p_t , описанные в теореме 1, интерпретируются как цены. Условие а) означает, что z_t максимизирует сумму полезности и прибыли в ценах p_t ; условие б) — что цена неиспользуемых ресурсов плана $\{z_t\}$ равна нулю. Факт, близкий к теореме 1, доказан в (¹) **.

* Если $x = (x^1, \dots, x^n)$ и $y = (y^1, \dots, y^n)$ — два вектора, то запись $y \geq x$ ($y > x$) означает, что $y^i \geq x^i$ ($y^i > x^i$) при всех i .

** Его доказательство и доказательство теоремы 1 легко получаются с помощью теоремы Куна — Таккера.

3. Опишем теперь вероятностную модель. Пусть $s_0, \dots, s_N$ — случайный процесс со значениями в измеримом пространстве S (значения s_t можно толковать, например, как состояния экономической конъюнктуры, внешней среды и т. п.). Пусть для каждого $t=1, 2, \dots, N$ заданы множество $\mathcal{T}_t$ измеримых функций $z_t(s^t) = (x_{t-1}(s^{t-1}), y_t(s^t))$ от $s^t = (s_1, \dots, s_t)$ со значениями в R^{2n} и функционал u_t на $\mathcal{T}_t$. Предположим, кроме того, что фиксирована измеримая функция $y_0(s^0) \geq 0$ со значениями в R^n . Интерпретация $\mathcal{T}_t, u_t, y_0$ аналогична их интерпретации в детерминированном случае. Аналогичным же образом определяются планы и оптимальные планы: план — это последовательность функций $z_t = (x_{t-1}, y_t) \in \mathcal{T}_t$, для которых $y_t \geq x_t^*$; оптимальный план максимизирует $\sum u_t(z_t)$.

То обстоятельство, что для $(x_{t-1}, y_t) \in \mathcal{T}_t$ вектор x_{t-1} зависит от s^{t-1} , а вектор y_t — еще от одного случайного параметра s_t , и означает учет неопределенности в ходе производственного процесса. (В момент затрат неизвестна случайная ситуация, складывающаяся к моменту выпуска.)

Описанная модель включает как частный случай модели типа (3-8). В последних считается заданным множество $\Theta_t(s^t) \subseteq R^{2n}$ и функция $\varphi_t(s^t, a, b)$ от $(a, b) \in \Theta_t(s^t)$; $\mathcal{T}_{t+1}$ состоит из функций $(x(s^t), y(s^t))$, значения которых лежат в $\Theta_t(s^t)$ п.н., а $u_{t+1}(x, y)$ равно математическому ожиданию $M\varphi_t(s^t, x(s^t), y(s^t))$.

4. Мы будем предполагать, что:

(I) функционалы u_t вогнуты;

(II) множества $\mathcal{T}_t$ выпуклы, содержат $(0, 0)$ и замкнуты относительно сходимости п.н.

Теорема 2. Для существования оптимальных планов достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) найдется константа A такая, что $M|z(s^t)| \leq A$ для всех $z \in \mathcal{T}_t$;

2) функционалы u_t полунепрерывны сверху относительно сходимости п.н.

5. Переходим к результатам о ценах. Пусть $\{p_t(s^t)\}$, $t=0, \dots, N$, — последовательность неотрицательных интегрируемых функций со значениями в R^n . Всякую такую последовательность мы будем называть системой цен (или просто ценами). Заменим в условиях а), б) $p_t y$, $p_{t-1} x$, $p_t y_t, \dots$ на $M p_t y$, $M p_{t-1} x$, $M p_t y_t, \dots$ и условия, которые получаются при этом, обозначим а₁), б₁). Если $\{z_t\}$ и $\{p_t\}$ удовлетворяют а₁), б₁), будем говорить, что цены $\{p_t\}$ стимулируют план $\{z_t\}$ в среднем ***. Предположим, что выполнены следующие требования:

(III) найдется такое C , что $|z(s^t)| \leq C$ п.н. для всех $z \in \mathcal{T}_t$;

(IV) функционалы u_t непрерывны относительно сходимости п.н.;

(V) если $z \in \mathcal{T}_t$ и ξ — измеримая функция от s^{t-1} , принимающая значения 0 и 1, то $\xi z \in \mathcal{T}_t$. Последнее условие означает возможность выбора между производственными процессами $z(s^t)$ и $(0, 0)$ в зависимости от ситуации s^{t-1} .

Теорема 3. Если найдется план $\{(x_{t-1}, y_t)\}$ такой, что для некоторого вектора $\delta > 0$ (не зависящего от s^t) $y_t \geq x_t + \delta$ при $t=0, \dots, N-1$, то существуют цены, стимулирующие в среднем любой оптимальный план.

6. В этом пункте мы формулируем основную теорему. Она относится к важному частному случаю описанной выше модели. Предположим, что для всех $t=0, \dots, N-1$ и s^t задано множество $G_t(s^t)$, элементами которого являются пары $z = (x, y(s))$, где x — неотрицательный n -мерный вектор (затраты), а $y: S \rightarrow R^n$ — неотрицательная измеримая функция (выпуск в зависимости от случайного параметра s). Предположим далее, что задан функционал $f_t(s^t, z)$, определенный для $z \in G_t(s^t)$ (полезность z). Мы будем

* Для двух функций x, y мы пишем $y \geq x$, если $y(s^t) \geq x(s^t)$ почти наверное (п.н.).

** Если z — вектор с координатами z^i , то $|z| = \sum |z^i|$.

*** Цены такого типа исследовались Раднером (9).

рассматривать модель, в которой $\mathcal{T}_{t+1}$ — это множество функций $(x(s^t), y(s^{t+1}))$ таких, что $(x(s^t), y(s^t, \cdot)) \in G_t(s^t)$ * п.н., а $u_{t+1}(x, y) = Mf_t(s^t, x(s^t), y(s^t, \cdot))$.

Пусть $p_t(s^t)$ — цены. Положим

$$v_t(s^t, z) = f_t(s^t, z) + \int \pi(s^t, ds) p_{t+1}(s^t, s) y(s) - p_t(s^t) x,$$

где $\pi(s^t, ds)$ — распределение s_{t+1} при условии s^t **. Значение v_t складывается из полезности и ожидаемой прибыли в ценах $\{p_t\}$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия А — В, приводимые ниже. Цены $\{p_t\}$ стимулируют план $\{z_t\} = \{(x_{t-1}, y_t)\}$ в среднем тогда и только тогда, когда при $t=0, \dots, N-1$ п.н.:

а₂) $z_{t+1} = (x_t(s^t), y_{t+1}(s^t, \cdot))$ максимизирует $v_t(s^t, z)$ по $z \in G_t(s^t)$;

б₂) $p_t(y_t - x_t) = 0$.

Если выполнены а₂) и б₂), мы говорим, что цены $\{p_t\}$ стимулируют план $\{z_t\}$ (ср. (5, 8)).

Чтобы сформулировать условия на G_t и f_t , при которых справедлива теорема 4, фиксируем t и будем писать для краткости G, f, σ, s вместо G_t, f_t, s^t, s_{t+1} . Для $z = (x, y(\cdot))$ и $z' = (x', y'(\cdot))$ положим:

$$\|z\|_{\sigma^4} = |x| + \int |y(s)| \pi(\sigma, ds), \quad \rho_{\sigma}(z, z') = \|z - z'\|_{\sigma^4},$$

$$\|z\|_{\sigma^{\infty}} = |x| + \text{ess sup } |y(s)|$$

(существенный супремум по мере $\pi(\sigma, \cdot)$). Следующие требования А, Б должны выполняться при почти всех σ :

А. $G(\sigma)$ выпукло, содержит $(0, 0)$, замкнуто относительно $\|\cdot\|_{\sigma^4}$ и ограничено в смысле $\|\cdot\|_{\sigma^{\infty}}$ равномерно по σ .

Б. 1) Функционал $f(\sigma, z)$ определен и вогнут на множестве всех $z \geq 0$ с $\|z\|_{\sigma^{\infty}} < \infty$;

Б. 2) если $\|z_k - z\|_{\sigma^4} \rightarrow 0$ и $\sup_k \|z_k\|_{\sigma^{\infty}} < \infty$, то $f(\sigma, z_k) \rightarrow f(\sigma, z)$;

Б. 3) для $z \in G(\sigma)$ $|f(\sigma, z)| \leq l(\sigma)$, где $l(\sigma) < \infty$.

В. Для любой ограниченной измеримой функции $z = (x, y(\cdot)) \geq 0$ величины $f(\sigma, z)$ и $\rho_{\sigma}(z, G(\sigma))$ (расстояние от z до множества $G(\sigma)$) измеримо зависят от σ .

Можно показать, что модель, в которой G_t и f_t обладают свойствами А — В, удовлетворяет условиям (I) — (V).

Пример (технология неймановского типа, ср. (19)). Пусть $A_t(s^t)$ и $B_{t+1}(s^{t+1})$ — две матрицы размера $n \times m$, элементы которых — неотрицательные ограниченные измеримые функции; $K_t(s^t)$ — выпуклый компакт в $\{d \in R^m, 0 \leq d \leq c\}$, $0 \in K_t(s^t)$. Предположим, что K_t измеримо зависит от s^t (т. е. расстояние от любого $d \in R^m$ до $K_t(s^t)$ — измеримая функция от s^t). Отнесем $(x, y(\cdot))$ к множеству $G_t(s^t)$, если для некоторого $d \in K_t(s^t)$ $x = A_t(s^t)d$ и $y(s) = B_{t+1}(s^t, s)d$ при $\pi(s^t, \cdot)$ — почти всех s . Проверяется, что G_t удовлетворяет требованиям, перечисленным в условиях А, В.

7. Доказательство теоремы 4 опирается на следующую теорему об измеримом выборе.

Теорема 5. Пусть U — измеримое пространство, V — стандартное измеримое пространство, $\mu(u, \Gamma)$ — измеримая функция по $u \in U$ и конечная

* Здесь $y(s^{t+1})$ при каждом s^t рассматривается как функция от s_{t+1} ; в знак этого мы пишем $y(s^t, \cdot)$.

** Для того чтобы существовали эти условия распределения, нужно наложить некоторые ограничения на измеримую структуру в S . Мы будем предполагать, что S — стандартное измеримое пространство (т. е. изоморфно борелевскому подмножеству полного сепарабельного метрического пространства).

мера по $\Gamma \subset V$. Пусть каждому u поставлено в соответствие замкнутое множество $H(u)$ в пространстве $L(u) = L_1(V, \mu(u, \cdot))$. Если для любой ограниченной измеримой функции $h(v)$ расстояние от $h(\cdot)$ до $H(u)$ в метрике пространства $L(u)$ измеримо зависит от u , то существует измеримая по (u, v) функция $h(u, v)$ такая, что $h(u, \cdot) \in H(u)$ при всех u .

В теореме 5 можно заменить L_1 на L_p , $1 \leq p < \infty$. Аналогичным образом норму L_1 , фигурирующую в А–В, можно заменить любой нормой L_p , $p \in [1, \infty)$.

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР
Москва

Поступило
2 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ D. Gale, Rev. Econ. Stud., v. 34, 1 (1967). ² D. Gale, Bull. Am. Math. Soc., v. 74, 2 (1968). Пер. Математика, т. 14, № 6 (1970). ³ Е. Б. Дынкин, ДАН, т. 200, 3 (1974). ⁴ Е. Б. Дынкин, Матем. сб., т. 87 (129), 4 (1972). ⁵ E. B. Dynkin, In: Mathematical Models in Economics, Amsterdam — London — N. Y. — Warszawa, 1974. ⁶ И. В. Евстигнеев, ДАН, т. 206, 5 (1972). ⁷ И. В. Евстигнеев, В сб. Международная конференция по теории вероятностей и математической статистике. Тезисы докладов, ч. 1, Вильнюс, 1973. ⁸ I. V. Evstigneev, In: Mathematical Models in Economics, Amsterdam — London — N. Y. — Warszawa, 1974. ⁹ R. Radner, J. Econ. Theory, v. 6, 1 (1973). ¹⁰ J. von Neumann, In: Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, VIII, Vienna, 1937.