

А. Б. ЖИЖЧЕНКО

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ РАССЛОЕНИЯХ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ В СЛОЯХ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 26 II 1975)

Рассматривается неособое проективное комплексное алгебраическое многообразие W , $\dim_c W = n$. Исследуем собственное регулярное отображение $f: W \rightarrow P^1$, где P^1 — комплексная проективная прямая. Прообразы точек $t \in P^1$ назовем слоями расслоения f : $F_t = f^{-1}(t)$. Предположим, что почти все слои расслоения f будут неособыми неприводимыми многообразиями размерности $n-1$. Имеется лишь конечное число особых слоев, соответствующих точкам $t_1, \dots, t_s, t_i \in P^1$, которые мы будем называть сингулярными точками прямой P^1 . Слои $F_i = F_{t_i} = f^{-1}(t_i)$, $i=1, \dots, s$, могут иметь, вообще говоря, произвольные особенности. Можно рассмотреть отображение $f': \{W - \cup F_i\} \rightarrow \{P^1 - \cup t_i\}$; очевидно, это регулярное гладкое собственное отображение. Теория Х. Хиронаки позволяет свести описанную картину к так называемой стандартной ситуации.

Лемма 1. *Существует неособое проективное алгебраическое многообразие $\tilde{W}$, $\dim_c \tilde{W} = n$ и собственное регулярное отображение $\tilde{f}: \tilde{W} \rightarrow P^1$ такое, что:*

1) *все слои расслоения $\tilde{f}$, за исключением слоев $\tilde{F}_1 = \tilde{f}^{-1}(t_1), \dots, \tilde{F}_s = \tilde{f}^{-1}(t_s)$, где $t_1, \dots, t_s$ — те же точки прямой P^1 , что и раньше, являются неособыми неприводимыми подмногообразиями $\tilde{W}$;*

2) *особые слои $\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_s$ связны и имеют лишь особенности типа нормальных пересечений;*

3) *имеется регулярный собственный морфизм $\varphi: \tilde{W} \rightarrow W$, ограничение которого является бирегулярным морфизмом*

$$\varphi': \{\tilde{W} - \cup \tilde{F}_i\} \rightarrow \{W - \cup F_i\};$$

4) *морфизм $\tilde{f}': \{\tilde{W} - \cup \tilde{F}_i\} \rightarrow \{P^1 - \cup t_i\}$ является собственным гладким;*

5) *квадрат отображений*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{W} - \cup \tilde{F}_i & \rightarrow & W - \cup F_i \\ \tilde{f}' \downarrow & & f' \downarrow \\ P^1 - \cup t_i & \leftrightarrow & P^1 - \cup t_i \end{array}$$

является коммутативным;

6) *отображение φ таково, что особый слой $\tilde{F}_i$ многообразия $\tilde{W}$ отображается на особый слой F_i многообразия W , причем эти отображения $\varphi'_i: \tilde{F}_i \rightarrow F_i$, $i=1, \dots, s$, являются собственными регулярными отображениями, обратные к которым являются моноидальными преобразованиями вдоль подмногообразий F_i .*

Доказательство леммы прямо следует из теоремы Хиронаки о разрешении особенностей ⁽¹⁾. Существенным при этом является возможность установить связь между группами гомологии многообразий W и $\tilde{W}$; гомологии $\tilde{W}$ выражаются в явной форме через гомологии W , а также гомологии подмногообразий особых слоев $F_1, \dots, F_s$, вдоль которых мы проводим моноидальные преобразования ^(5, 6).

Таким образом, задача о гомологическом строении расслоения W в известном смысле сводится к задаче о гомологическом строении расслоения $\tilde{W}$, особенности слоев которого имеют тип нормальных пересечений.

Рассмотрим некоторую точку $t_0 \in P^1$, близкую к сингулярной точке t_i . Тогда, как известно ⁽³⁾, можно построить отображение

$$\tilde{r}^i: \tilde{F}_0 \rightarrow \tilde{F}_i,$$

ретракцию неособого слоя на особый, и отображение

$$\tilde{\theta}^i: \tilde{F}_0 \rightarrow \tilde{F}_0,$$

отображение неособого слоя на себя, соответствующее обходу точки t_0 по окружности с центром в t_i против часовой стрелки. Этим отображениям соответствуют морфизмы группы гомологий

$$\tilde{r}_*^i: H_*(\tilde{F}_0) \rightarrow H_*(\tilde{F}_i),$$

$$\tilde{\theta}_*^i: H_*(\tilde{F}_0) \rightarrow H_*(\tilde{F}_0).$$

Ядро отображения $\tilde{r}_*^i$ называется обычно локальной (соответствующей точке t_i) группой исчезающих циклов, или локальным модулем Лефшетца:

$$L_*^i = \text{Ker } \tilde{r}_*^i, \quad L_p^i = \text{Ker } \tilde{r}_p^i \subset H_p(\tilde{F}_0).$$

Коядро морфизма $\tilde{r}_*^i$ обозначим через S_*^i , $S_p^i \subset H_p(\tilde{F}_i)$. Если рассмотреть спектральную последовательность Лере (в гомологиях) отображения $\tilde{r}^i$, то можно показать, что элементы подгруппы S_*^i будут трансгрессивными гомологическими классами $\tilde{F}_i$. Элементы $\alpha \in H_*(\tilde{F}_0)$ такие, что $\tilde{\theta}_*^i(\alpha) = \alpha$, или $(\tilde{\theta}_*^i - 1)\alpha = 0$, называются локально инвариантными; они образуют подгруппу

$$\text{Inv}_*^i \subset H_*(\tilde{F}_0), \quad \text{Inv}_p^i \subset H_p(\tilde{F}_0),$$

называемую локально инвариантной подгруппой (соответствующей точке t_i).

Если обозначить через $\pi_1(P^1 - \cup t_i)$ гомотопическую группу прямой P^1 с выколотыми точками $t_1, \dots, t_s$, а через Inv_* — подгруппу группы $H_*(\tilde{F}_0)$, инвариантную относительно действия π_1 , $\text{Inv}_p \subset H_p(\tilde{F}_0)$, то, очевидно, что

$$\text{Inv}_* = \cap \text{Inv}_*^i, \quad \text{Inv}_p = \cap \text{Inv}_p^i;$$

подгруппу Inv_* будем называть (глобально) инвариантной подгруппой.

Через L_* обозначим (глобальный) модуль Лефшетца, порожденный локальными подгруппами L_*^i , т. е.

$$L_* = \{L_*^1, \dots, L_*^s\}, \quad L_p = \{L_p^1, \dots, L_p^s\}, \quad L_* \subset H_*(\tilde{F}_0), \quad L_p \subset H_p(\tilde{F}_0).$$

Через S_* обозначим группу, порожденную группами S_*^i , $S_p^i = \{S_p^1, \dots, S_p^s\}$.

Рассмотрим морфизм вложения

$$i: \tilde{F}_0 \rightarrow \tilde{W}$$

и соответствующий ему морфизм групп гомологий

$$i_*: H_*(\tilde{F}) \rightarrow H_*(\tilde{W}).$$

Очевидно, что $L_* \subset \text{Ker } i_*$.

Рассмотрим также морфизмы $s_p: H_p(\tilde{W}) \rightarrow H_{p-2}(\tilde{F}_0)$, соответствующие пересечению с общим слоем $\tilde{F}_0$ расслоения $\tilde{f}$. Этот морфизм удобно определять как двойственный к морфизму органичения в когомологиях:

$$\begin{array}{ccc} H^{n-p}(\tilde{W}) & \rightarrow & H^{n-p}(\tilde{F}_0) \\ D \downarrow & & D \downarrow \\ H_p(\tilde{W}) & \rightarrow & H_{p-2}(\tilde{F}_0) \end{array}$$

Лемма 2. Образом морфизма s_p является инвариантная подгруппа $\text{Inv}_{F_{p-2}} \subset H_{p-2}(F_0)$.

Очевидным является включение $\text{Im } s_p \subseteq \text{Inv}_{p-2}$. Доказательство обратного включения $\text{Inv}_{p-2} \subseteq \text{Im } s_p$ следует из результатов П. Делиня и требует применения теории Ходжа ^(2, 3).

Определим подгруппу $\Lambda_p \subset H_p(\bar{W})$, порожденную локальными подгруппами Лефшетца $L_{p-1}^i \subset H_{p-1}(F_0)$. При этом каждому элементу $(\delta_1, \dots, \delta_s) \in \mathbb{Z}^s$ сопоставляется некоторый (единственный) элемент $\Delta \in \Lambda_p$.

Построение проводится аналогично построению циклов Δ работы автора ⁽⁴⁾.

Лемма 3. Ранг группы Λ_p равен

$$\tau_p = \sum_i \rho_{p-1}^i - k_{p-1},$$

где ρ_{p-1}^i — ранг группы L_{p-1}^i , а k_{p-1} — ранг группы L_{p-1} .

Рассмотрим морфизм $\sigma_{p-1}: H_{p-1}(F_0) \rightarrow L_{p-1}^1 \oplus \dots \oplus L_{p-1}^s$, определяемый по формуле

$$\sigma_{p-1}(\alpha) = ((\bar{\theta}_{p-1}^1 - 1)\alpha, \dots, (\bar{\theta}_{p-1}^s - 1)\alpha),$$

где $\alpha \in H_{p-1}(F_0)$, а $\bar{\theta}_{p-1}^i$ — автоморфизмы, определенные ранее. Этот морфизм может быть продолжен до морфизма

$$D_{p-1}: H_{p-1}(F_0) \rightarrow \Lambda_p.$$

Перейдем теперь к описанию гомологического строения $\bar{W}$ через введенные группы.

Теорема. Существует точная последовательность групп:

$$H_{p-1}(F_0) \xrightarrow{D_{p-1}} \Lambda_p \oplus S_p \oplus H_p(F_0)/L_p \xrightarrow{j} H_p(\bar{W}) \xrightarrow{s_p} \text{Inv}_{p-2} \rightarrow 0,$$

в которой D_{p-1} и s_p являются описанными выше морфизмами, причем D_{p-1} является морфизмом в первое прямое слагаемое второго члена последовательности.

Таким образом, ранг группы $H_p(\bar{W})$ вычисляется по формуле

$$r(H_p(\bar{W})) = r(\Lambda_p / \text{Im } D_{p-1}) + r(S_p) + r(\text{Inv}_{p-2}) + r(H_p(F_0)/L_p).$$

Эта теорема позволяет до конца провести вычисление в ряде полезных частных случаев, например, когда особые слои устранены как объединение гладких подмногообразий $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_h$, каждое из которых имеет кратность 1 и которые пересекаются трансверсально по неособым подмногообразиям.

Отделение математики Академии наук СССР
Москва

Поступило
30 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ H. Hironaka, Ann. Math., v. 79, 109 (1964). ² P. Deligne, Theorie de Hodge, I, II, III, Publ. Math. Inst. des Hautes Etudes Sci., 1970, 1971, 1972. ³ Ф. А. Гриффитс, УММ, т. 25, в. 3 (1970). ⁴ А. Б. Жижченко, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 25, 765 (1961). ⁵ B. Segre, Ann. Mat., (14), v. 43, 1 (1957). ⁶ H. Guggenheimer, ibid., v. 52, 1 (1960).