

С. В. ЗНАМЕНСКИЙ

СВЯЗЬ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ С РЯДАМИ ДИРИХЛЕ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ПРИЛОЖЕНИЯ К ПРЕДСТАВЛЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 5 III 1975)

1. Зафиксируем совокупность положительных чисел $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ такую, что $1, \ln b_1, \dots, \ln b_n$ линейно независимы над кольцом целых чисел. Пусть $\{q_r\}_{r=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность конечных произведений элементов B . Тогда равенство $f(B_1^z, \dots, b_n^z) = \varphi(\xi)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие * между функциями, голоморфными в окрестности нуля в $\mathbb{C}^n$ и функциями, представимым рядом Дирихле вида

$$\varphi(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k q_k^{-z}. \quad (1)$$

Это соответствие линейно и мультипликативно; более того, если $\lambda(\xi)$ голоморфна в окрестности $f(0)$, то $\lambda \circ f$ соответствует $\lambda \circ \varphi$.

$f(z)$ голоморфна в единичном поликруге $U_n \subset \mathbb{C}^n$ тогда и только тогда, когда $\varphi(\xi)$ голоморфна в $\{\xi: \operatorname{Re} \xi > 0\}$. В дальнейшем будем считать, что $f(z)$ и $\varphi(\xi)$ определены в этих областях, при этом область значений функции $\varphi(\xi)$ плотна в области значений $f(z)$. Топологии равномерной сходимости на комплексах из U_n соответствует естественная для рядов Дирихле топология равномерной сходимости на полуплоскостях $\{\xi: \operatorname{Re} \xi \geq \varepsilon > 0\}$.

Из результатов Бохнера ⁽¹⁾ нетрудно получить, что описанное соответствие сохраняет классы H^p , $p \geq 1$, в рассматриваемых областях, и

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|z_k|=1} |f|^p \frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_n}{z_n} = M_p(|\varphi(iy)|^p);$$

здесь и ниже

$$M_p(g(y)) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^A g(y) dy$$

среднее значение функции на оси.

Равномерные алгебры функций, голоморфных внутри и непрерывных в замыкании единичного поликруга, и функций, представимых рядом (1) в правой полуплоскости и непрерывных в ее замыкании, изометрически изоморфны. При этом граничные значения φ и значения f на острове подчинены известной связи между почти-периодическими функциями одного переменного и периодическими функциями n действительных переменных, описанной в ⁽¹⁾. Заметим, что наше соответствие можно рассматривать как комплексный аналог этой связи.

* Это соответствие наталкивает на пример аналитического определяющего множества. Так, образ любого ограниченного открытого множества в левой полуплоскости при отображении $f_1(z) = 2^z$, $f_2(z) = 3^z$ является множеством единственности для функций, голоморфных в единичном поликруге.

Обозначим

$$S_k[a_k] = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2m} \sum_{k=-m}^m a_k$$

среднее значение последовательности $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$.

Теорема 1. Любая функция f , голоморфная в U_n и непрерывная на $\bar{U}_n$, восстанавливается по своим значениям на остоле формулами

$$f(z) = M_v \left(\frac{f(b_1^{iv}, \dots, b_n^{iv})}{(1 - z_1 b_1^{-iv}) \cdot \dots \cdot (1 - z_n b_n^{-iv})} \right), \quad z \in U_n,$$

$$f(z) = S_k \left[\frac{f(b_1^{ik}, \dots, b_n^{ik})}{(1 - z_1 b_1^{\delta(k) - ik}) \cdot \dots \cdot (1 - z_n b_n^{\delta(k) - ik})} \right], \quad z \in \bar{U}_n, \quad (2)$$

где последовательность $\delta(n)$ определяется выбором B . При $\delta(k) = 0$ функция $f(z)$ представляется только в U_n .

Эти формулы можно рассматривать как своеобразные аналоги интегрального представления Коши в поликруге для одномерного (для дискретного) множества интегрирования.

Другой способ восстановления функции по тому же множеству, что и в формуле (2), см. в (2).

2. Эту связь функций можно распространить на случай $n = \infty$, что позволяет использовать ее при изучении нелинейных аналитических функционалов и операторов.

Фиксируем возрастающую последовательность действительных чисел $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $1, \ln b_1, \ln b_2, \dots$ линейно независимы над кольцом целых чисел.

Обозначим

$$\bar{U}_r = \{z = (z_1, z_2, \dots) : |z_j| < b_j^{-r}, j = 1, 2, \dots\}, \quad \bar{U} = \bar{U}_0;$$

$$U = \left\{ z : |z_j| < 1, \sum_k |z_k| < \infty, j = 1, 2, \dots \right\}.$$

Рассмотрим класс $A(\bar{U})$ голоморфных функций бесконечного числа переменных (аналитических функционалов), т.е. таких отображений $f: \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}^1$, которые представляются равномерно сходящейся в $\bar{U}$ последовательностью полиномов от конечного (но не обязательно фиксированного) числа переменных. Пусть $\{q_k\}$ — возрастающая последовательность всех конечных произведений b_i . Тогда алгебра $A(\bar{U})$ с естественными операциями сложения, умножения и нормой $\sup |f|$ изоморфна алгебре равномерных пределов полиномов Дирихле вида $\varphi(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k q_k^{-\xi}$ с нормой $\sup |\varphi|$. При этом область значений функции φ плотна в области значений функционала f и f аналитически продолжается в больший U_r тогда и только тогда, когда φ продолжается в полуплоскость $\{\xi: \operatorname{Re} \xi \geq -r\}$.

Этот изоморфизм устанавливается формулой $\varphi(\xi) = f(b_1^{-\xi}, b_2^{-\xi}, \dots)$.

Изложенную выше часть п. 2 можно перенести на случай континуального числа переменных.

Заметим, что функции, представимые классическим рядом Дирихле $\varphi(\xi) = \sum a_k k^{-\xi}$, суть сужения аналитических функционалов на одномерную определяющую поверхность $z_1 = b_1^{-\xi}, z_2 = b_2^{-\xi}, \dots$, где $b_k = p(k)$ (т.е. k -е простое число); при этом ξ -функция Римана есть сужение бесконечномерного ядра Коши.

Пусть теперь $b_k > 2^k$; тогда $\bar{U} \supset \bigcap_{r < 0} \bar{U}_r$, и справедлива

Теорема 2. Любому функционалу из $A(\bar{U})$ равенство $\varphi_k = \varphi(b_1^{ik}, b_2^{ik}, \dots)$ ставит во взаимно однозначное соответствие числовую последовательность, причем:

1) алгебра $A(\bar{U})$ изометрически изоморфна алгебре таких последовательностей с операциями почленного сложения и умножения и нормой $\sup |\varphi_k|$;

2) можно указать такую неположительную монотонно сходящуюся к нулю последовательность $\{\delta(k)\}$, зависящую только от выбора $\{b_k\}$, что формула

$$\varphi(z) = S_k[\varphi_k \cdot (1 - z_1 b_1^{\delta(k) - ik})^{-1} (1 - z_2 b_2^{\delta(k) - ik})^{-1} \dots]$$

восстанавливает любой функционал в $\bar{U}$ (при $\delta(k) \equiv 0$ функционал восстанавливается только в U).

3. Обозначим f_k коэффициенты разложения элемента f гильбертова сепарабельного пространства H по некоторому ортонормированному базису $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Определим теперь

$$V_r = \left\{ f: \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| b_k^r \leq 1 \right\}; \quad \bar{V} = \bar{V}_0; \quad V = \left\{ f: \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| < 1 \right\}.$$

Назовем оператор $L: \bar{V} \rightarrow \bar{V}$, $L(f) = \sum \varphi_k l_k$ аналитическим на множестве $\bar{V}$, если $\varphi_k(f)$ приближается последовательностью полиномов от конечного (но не обязательно фиксированного) числа f_j , сходящейся равномерно на некотором $\bar{V}_r$, $r < 0$.

Теорема 3. Каждому оператору L , аналитическому на $\bar{V}$, можно поставить во взаимно однозначное соответствие матрицу $\{l_{mn}\}_{m,n=-\infty}^{\infty}$ так, что:

1) это соответствие линейно (т. е. оператору $\alpha L + \beta Q$ соответствует матрица $\{\alpha l_{mn} + \beta q_{mn}\}_{m,n=-\infty}^{\infty}$);

2) композиции операторов L и Q соответствует матрица

$$\left\{ S_k \left[\frac{l_{mk}}{1 - q_{kn}} \right] \right\}_{m,n=-\infty}^{\infty};$$

3) значение оператора для любого $f_k \in \bar{V}$ можно вычислить по формуле

$$L(f) = S_k \left[S_m \left[\frac{l_{mk} \Theta_{-k}}{1 - (f, \Theta_m)} \right] \right], \quad \Theta_m = \sum_k e_k \rho_k^{im + \delta(m)}.$$

Представление нелинейного оператора в виде матрицы может оказаться полезным при расчете нелинейных процессов на ЭВМ.

4. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода в $L_2(\Omega)$ с ядром $K(x, y)$. Обозначим

$$\bar{K}_{lm} = \int_{\Omega \times \Omega} K(x, y) \Theta_l(x) \Theta_{-m}(y) dx dy.$$

Теорема 4. Пусть $K(x, y) = \sum_{k,s} a_{ks} e_k(x) e_s(y)$. При $\lambda < (\sum_{k,s} |a_{ks}|)^{-1}$ резольвенту ядра можно вычислить по формуле

$$\lambda R(x, y, \lambda) = S_k \left[\frac{\Theta_k(x) \Theta_{-m}(y)}{1 - \lambda \bar{K}_{lm}} \right].$$

Заметим, что это выражение проще, чем в ⁽³⁾, и подходит для более широкого класса ядер.

Автор глубоко благодарен Л. А. Айзенбергу за постоянное внимание к работе.

Институт физики им. Л. В. Киренского
Сибирского отделения Академии наук СССР
Красноярск

Поступило
26 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ *S. Bochner*, Ann. Math., v. 45, № 4, 708 (1944). ² *Ching Chin-Hung, Charles K. Chni*, J. Approxim. Theory, v. 10, № 4, 324 (1974). ³ *M. Caraja*, Ann. Scuola Normale Sup., Pisa, 4, ser. 3, fasc. 3—4, 175 (1950).