

УДК 518; 517.392; 519.44

МАТЕМАТИКА

Г. Н. САЛИХОВ

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ГИПЕРСФЕРЫ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ПРАВИЛЬНОГО 600-ГРАННИКА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 17 III 1975)

Настоящая заметка является дополнением к заметке автора ⁽¹⁾ и содержит ответ на вопрос, оставшийся там открытым, об исследовании группы G_{600} — правильного 600-гранника четырехмерного пространства.

В п. 3 приведены параметры (коэффициенты и узлы) двух кубатурных формул, инвариантных относительно G_{600} , точных для сферических гармоник 11-го и 19-го порядков.

1. Кокстером ⁽²⁾ доказано, что группа G_{600} есть центральное произведение двух экземпляров специальных линейных групп $SL(2, 5)$, т. е.

$$G_{600} = G/H,$$

где

$$G = SL(2, 5) \times SL(2, 5),$$

а H — центр диагонали этого прямого произведения.

Группа G_{600} имеет порядок $M=7200$ и содержит 451 элемент 2-го порядка, 440 элементов 3-го, 60 элементов 4-го, 624 элемента 5-го, 440 элементов 6-го, 624 элемента 10-го, 1200 элементов 12-го, 960 элементов 15-го, 1440 элементов 20-го, 960 элементов 30-го порядков. Знание порядков элементов G_{600} необходимо для нахождения углов поворотов, соответствующих каждому элементу группы.

Ввиду того, что любое вращение вокруг начала координат в четырехмерном пространстве может задаваться матрицей вида

$$P(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix},$$

то каждому элементу $g \in G_{600}$ соответствует определенная пара (α, β) углов поворотов, т. е. $g \sim (\alpha, \beta)$.

Прежде чем выписать пары (α, β) для элементов G_{600} , во-первых, объединим их в максимальные циклические подгруппы и, во-вторых, для каждого порядка определим число сопряженных подгрупп. После этих упрощений достаточно ограничиться выписыванием значений углов поворота (α, β) только для одного образующего элемента каждого множества сопряженных максимальных циклических подгрупп.

Соответствующие подсчеты приводят к следующим результатам: элементы G_{600} объединяются в максимальные циклические подгруппы (табл. 1).

Мощность множеств сопряженных подгрупп к каждому из перечисленных в табл. 1 такова:

$$\begin{aligned} |\{H_{30}\}| &= 120, & |\{H_{20}\}| &= 180, & |\{H_{12}\}| &= 300, \\ |\{H_{10}^{(1)}\}| &= |\{H_{10}^{(2)}\}| &= 72, & |\{H_6\}| &= 200, & |\{H_2\}| &= 450. \end{aligned}$$

Таблица 1

Группа	Порядок	Образующий элемент	Группа	Порядок	Образующий элемент
H_{30}	30	$g_1 \sim (\pi/15, 11\pi/15),$	$H_{10}^{(2)}$	10	$g_5 \sim (\pi/5, \pi)$
H_{20}	20	$g_2 \sim (3\pi/10, 7\pi/10),$	H_6	6	$g_6 \sim (\pi/3, \pi)$
H_{12}	12	$g_3 \sim (\pi/6, 5\pi/6),$	H_2	2	$g_7 \sim (0, \pi)$
$H_{10}^{(1)}$	10	$g_4 \sim (\pi/5, 3\pi/5),$			

2. За базис сферических гармоник порядка n в четырехмерном пространстве примем функции ⁽³⁾

$$\exp[i(m\varphi + k\psi)] P_n^{(m,k)}(\sin \theta), \quad (1)$$

где

$$P_n^{(m,k)}(\sin \theta) = \cos^{|m|} \theta \left[\sum_{j=0}^{\frac{n-|m|-|k|}{2}-1} (-1)^{j+1} \prod_{p=0}^j \frac{[(n-|m|-2p)^2 - k^2]}{[(|m|+2p+2)^2 - m^2]} \times \right. \\ \left. \times \cos^{2j+2} \theta [\sin \theta]^{n-|m|-2j-2} + \sin^{n-|m|} \theta \right], \quad (2)$$

$$|m| + |k| \leq n, \quad (m+k) \equiv n \pmod{2}.$$

При каждом вращении сферы на углы (α, β) функции (1) претерпевают некоторую линейную подстановку. Следовательно, если (α, β) пробегает все значения, соответствующие элементам G_{600} , то матрицы A_i , $i = 1, \dots, M$, порядков $(n+1)^2$ этих подстановок осуществляют линейное представление группы G_{600} .

Результатом каждой линейной подстановки, соответствующей вращению сферы на углы (α, β) , является умножение функций (1) на множители

$$\exp[i(m\alpha + k\beta)], \quad (3)$$

и инвариантными будут, очевидно, те функции, для которых этот множитель равен единице.

Число линейно независимых сферических гармоник порядка n , инвариантных относительно группы G_{600} , обозначим $S(n)$. Известно ⁽⁴⁾, что

$$S(n) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \chi(A_i), \quad (4)$$

где $\chi(A_i)$ — характер представления A_i .

Очевидно, характер представления A , соответствующего углам поворотов (α, β) , есть

$$\chi(A) = \sum_{\substack{|m|+|k| \leq n \\ (m+k) \equiv n \pmod{2}}} \exp[i(m\alpha + k\beta)] = \\ = \sum_{j=1}^{(n+1)^2} \exp[i(m_j\alpha + k_j\beta)], \quad (5)$$

и если эти углы поворотов (α, β) соответствуют образующему элементу максимальной циклической подгруппы порядка v , то

$$\sum_{r=1}^v \chi(A_r) = \sum_{r=1}^v \sum_{j=1}^{(n+1)^2} \exp r[i(m_j\alpha + k_j\beta)]. \quad (6)$$

Составив суммы вида (6) для всех максимальных циклических подгрупп, подставив их в (4), при этом учитывая возможные пересечения подгрупп, получим

$$S(n) = \frac{1}{240} [120\tau_1(n) + 24\tau_2(n) + 24\tau_3(n) + 40\tau_4(n) + \tau_5(n)], \quad (7)$$

где n четное и

$$\tau_1(n) = \left(2 \left[\frac{n}{10}\right] + 1\right) \left(2 \left[\frac{n}{6}\right] + 1\right) + \left(2 \left[\frac{n}{10}\right] + 1\right) \left(2 \left[\frac{n}{4}\right] + 1\right) + \left(2 \left[\frac{n}{6}\right] + 1\right) \left(2 \left[\frac{n}{4}\right] + 1\right),$$

$$\tau_2(n) = 4 \left(\sum_{r=0}^4 \left(\left[\frac{n-2r}{10}\right] + 1 \right)^2 + \left[\frac{n-8}{10}\right] - \left[\frac{n-2}{10}\right] - \left[\frac{n}{10}\right] \right) - 3,$$

$$\tau_3(n) = \left(2(n-4) - 5 \left[\frac{n-4}{5}\right]\right) \left(1 + \left[\frac{n-4}{5}\right]\right) + n + 1,$$

$$\tau_4(n) = \left(2(n-2) - 3 \left[\frac{n-2}{3}\right]\right) \left(1 + \left[\frac{n-2}{3}\right]\right) + n + 1,$$

$$\tau_5(n) = 13(n+1)^2 - 4(n+1) \left(59 + 48 \left[\frac{n}{10}\right] + 40 \left[\frac{n}{6}\right] + 30 \left[\frac{n}{4}\right]\right) + 15,$$

а при $n=2q+1$

$$S(n) = 0.$$

Вводя обозначение

$$\sigma(n) = \sum_{k=0}^n (k+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

приведем таблицу функций $S(n)$ и $\sigma(n)$ для начальных значений n ($n \leq 40$), причем выпишем только те значения этих функций, когда $S(n) \neq 0$ (табл. 2).

Т а б л и ц а 2

n	0	12	20	24	30	32	36	40
$(n+1)^2$	1	169	441	625	961	1089	1369	1681
$\sigma(n)$	1	819	3311	5525	10416	12529	17575	23821
$S(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1

3. Перейдем к построению кубатурных формул. Как видно из табл. 2, если на гиперсфере фиксировать точку и в качестве узлов кубатурных формул рассмотреть все точки, эквивалентные ей по группе G_{600} , и коэффициент кубатурной формулы в них выбрать так, чтобы формула была точна только для постоянной, то такая формула будет точно интегрировать все сферические гармоники до 11-го порядка включительно, т. е. 650 гармоник.

Точки $(\pm 1, 0, 0, 0)$, $(\pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$ и всевозможные их перестановки вместе с четными перестановками точек $(\pm t/2, \pm 1/2, \pm 1/2, 0)$ являются вершинами (их будет 120 штук) правильного 600-гранника, вписанного в сферу $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$. Если эти точки выбрать в качестве узлов кубатурной формулы с коэффициентом $C = \pi^2/60$, то такая формула и будет точной для сферических гармоник до 11-го порядка. Коэффициент эффективности $(^5)$ этой формулы

$$E = \frac{\sigma(11)}{4 \cdot 120} = \frac{65}{48},$$

по-видимому, является наивысшей для кубатурных формул по сфере четырехмерного пространства.

Граниями правильного 600-гранника являются правильные тетраэдры, проекции центров которых на сфере четырехмерного пространства дают вершины правильного 120-гранника, двойственного к 600-граннику; гранями последнего являются правильные додекаэдры трехмерного пространства.

Вершинами правильного 120-гранника являются всевозможные перестановки точек

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1, \pm 1, 0, 0), \quad \frac{1}{2\sqrt{2}}(\pm \sqrt{5}, \pm 1, \pm 1, \pm 1),$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(\pm t^{-2}, \pm t, \pm t, \pm t), \quad \frac{1}{2\sqrt{2}}(\pm t^2, \pm t^{-1}, \pm t^{-1}, \pm t^{-1})$$

и только четные перестановки точек

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(\pm t^2, \pm 1, \pm t^{-2}, 0), \quad \frac{1}{2\sqrt{2}}(\pm \sqrt{5}, \pm t, \pm t^{-1}, 0),$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(\pm 2, \pm t, \pm 1, \pm t^{-1}).$$

Если рассмотреть кубатурную формулу с 720 узлами, состоящими из вершин 600-гранника и 120-гранника, с коэффициентами $C_1 = \pi^2/252$ и $C_2 = 4\pi^2/1575$ соответственно в двух группах вершин, то такая кубатурная формула будет точна для сферических гармоник до 19-го порядка включительно.

Коэффициент эффективности этой формулы

$$E = \frac{\sigma(19)}{4 \cdot 720} = \frac{287}{288}.$$

Институт кибернетики с Вычислительным центром
Академии наук УзССР
Ташкент

Поступило
11 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. Н. Сализов, ДАН, т. 205, № 1, 33 (1972). ² H. S. M. Coxeter, Proc. Cambridge Phil. Soc., v. 33, 315 (1937). ³ Г. Н. Сализов, Изв. АН УзССР, сер. физ.-матем. наук, № 6, 21 (1963). ⁴ С. Л. Соболев, Сибирск. матем. журн., т. 3, № 5, 769 (1962). ⁵ Г. Н. Сализов, В кн. Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики, «Наука», Новосибирск, 1973, стр. 22. ⁶ М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, Основы теории групп, М., «Наука», 1972.