

В. А. ИЛЬИН

**О РАВНОМЕРНОЙ РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ
ПО СОБСТВЕННЫМ И ПРИСОЕДИНЕННЫМ ФУНКЦИЯМ
НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОБЫКНОВЕННОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА
И В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ**

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 24 III 1975)

1°. В работе изучаются разложения в биортогональный ряд по собственным и присоединенным функциям, связанным с несамосопряженным обыкновенным дифференциальным оператором L любого порядка n . Функции $\{u_k\}$ и $\{v_k\}$, образующие на основной области G^* биортогональную систему, предполагаются принадлежащими во всей области G лишь классу L_2 ; конкретный вид краевых условий, порождающих изучаемую биортогональную систему, не играет никакой роли. Пусть $\mathcal{D}$ — произвольное открытое подмножество основной области G , $\dot{L}_1(\mathcal{D})$ — класс функций, имеющих в $\mathcal{D}$ компактный носитель, равных нулю вне $\mathcal{D}$ и интегрируемых по Лебегу.

Основная цель работы — выяснение условий на коэффициенты оператора L и на функции $\{u_k\}$ и $\{v_k\}$ биортогональной системы, при выполнении которых для любой функции $f(x)$ из класса $\dot{L}_1(D)$ разность между разложением этой функции в биортогональный ряд и разложением ее же в тригонометрический ряд Фурье стремится к нулю равномерно на любом компакте K множества $\mathcal{D}$.

Нам удалось доказать равномерную равносходимость указанных разложений для случая произвольного несамосопряженного дифференциального оператора L порядка n с совершенно произвольными краевыми условиями, обеспечивающими лишь некоторое асимптотическое поведение собственных чисел. Более того, нами доказано, что на равномерную равносходимость указанных разложений на любом компакте K множества $\mathcal{D}$ не влияет поведение коэффициентов дифференциального оператора и функций биортогональной системы за пределами множества $\mathcal{D}$. При некоторых естественных требованиях на спектр нам удалось установить необходимые и достаточные условия равномерной расходимости указанных разложений на любом компакте K множества $\mathcal{D}$.

2°. Основные определения. Формулировка результатов. Рассмотрим дифференциальный оператор порядка n

$$Lu = u^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) u^{(k)}, \quad (1)$$

коэффициенты $p_k(x)$ которого мы предположим принадлежащими классам C^{k+1} на некотором подмножестве $\mathcal{D}$ основной области G^{**} . Поведение коэффициентов $p_k(x)$ за пределами множества $\mathcal{D}$ не играет никакой роли.

* Под основной областью G можно понимать интервал, полупрямую или бесконечную прямую.

** Подчеркнем, что требование $p_k(x) \in C^k(\mathcal{D})$ является минимальным требованием, обеспечивающим существование для оператора L на множестве $\mathcal{D}$ понимаемого в классическом смысле формально сопряженного дифференциального оператора L^* .

Пусть $\{u_k(x)\}$, $\{v_k(x)\}$ — некоторая биортогональная в $L_2(G)$ система такая, что функции $u_k(x)$ являются на подмножестве $\mathcal{D}$ области G регулярными решениями дифференциального уравнения для собственных или соответственно для присоединенных функций оператора L , отвечающими собственному значению λ_k , а функции $v_k(x)$ являются на подмножестве $\mathcal{D}$ регулярными решениями дифференциального уравнения для собственных или соответственно для присоединенных функций сопряженного оператора L^* , отвечающими собственному значению $\bar{\lambda}_k$.

Полнота систем $\{u_k\}$ и $\{v_k\}$ во всей основной области G , вообще говоря, не предполагается.

В частном случае, когда оператор L задан на всей основной области G и его коэффициенты принадлежат классам $p_k(x) \in C^{k+1}(G)$, под биортогональной системой $\{u_k(x)\}$, $\{v_k(x)\}$ можно понимать системы собственных и присоединенных функций операторов L и L^* соответственно, отвечающие на границе области G произвольным краевым условиям, конкретный вид которых в дальнейшем не играет никакой роли.

Вместо собственных чисел λ_k будем рассматривать числа μ_k , равные $((-\lambda_k) \cdot (-1)^{n/2})^{1/n}$ для четного n и равные для нечетного n числам $((-i)\lambda_k)^{1/n}$ при $\text{Im } \lambda_k \geq 0$ и $(i\lambda_k)^{1/n}$ при $\text{Im } \lambda_k < 0$ (здесь всюду $(re^{i\varphi})^{1/n} = r^{1/n} \cdot e^{i\varphi/n}$, причем $-\pi/2 \leq \varphi < 3\pi/2$).

Предметом нашего изучения являются частичные суммы биортогональных рядов *

$$\sigma_\mu(x, f) = \sum_{|\mu_k| < \mu} (f, v_k) \cdot u_k(x), \quad \hat{\sigma}_\mu(x, f) = \sum_{\mu_k < \mu} (f, u_k) \cdot v_k(x), \quad (2)$$

составленные для любой функции $f(x)$ из класса $\dot{L}_1(\mathcal{D})$ и любого вещественного $\mu > 0$. Эти частичные суммы будут сравниваться с соответствующей частичной суммой тригонометрического ряда Фурье той же самой функции $f(x)$, которая с точностью до слагаемого, равномерно сходящегося к нулю, равна

$$S_\mu(x, f) = \frac{2}{\pi} \int_{x-R}^{x+R} \frac{\sin \mu |x-y|}{|x-y|} f(y) dy,$$

где R — достаточно малое положительное число.

Определение 1. Мы будем говорить, что разложение данной функции $f(x)$ в биортогональный ряд равномерно равносходится с разложением ее в тригонометрический ряд Фурье на компакте K , если каждая из разностей $\sigma_\mu(x, f) - S_\mu(x, f)$ и $\hat{\sigma}_\mu(x, f) - S_\mu(x, f)$ стремится к нулю равномерно на компакте K .

Определение 2. Будем говорить, что система $\{u_k\}$ (система $\{v_k\}$) образует на компакте K области G след базиса в L_2 в слабом смысле, если для любой функции $f(x)$ из класса $** \dot{L}_2(K)$ сумма $\sigma_\mu(x, f)$ (сумма $\hat{\sigma}_\mu(x, f)$) слабо сходится в $L_2(K)$ к $f(x)$ при $\mu \rightarrow \infty$, т. е. если при $\mu \rightarrow \infty$ для любых $f(x)$ и $g(x)$ из класса $\dot{L}_2(K)$

$$(\sigma_\mu(x, f) - f, g) \rightarrow 0 \quad ((\hat{\sigma}_\mu(x, f) - f, g) \rightarrow 0).$$

Определение 3. Будем говорить, что система $\{u_k\}$ (соответственно $\{v_k\}$) образует след базиса в L_2 в слабом смысле на множестве $\mathcal{D}$, если эта система образует след базиса в L_2 в слабом смысле на любом компакте K множества $\mathcal{D}$.

* В случае, если имеются точки сгущения чисел μ_k и суммы (2) при конечном μ содержат бесконечное число слагаемых, всюду ниже будут выполнены условия, обеспечивающие абсолютную сходимость соответствующих рядов (2).

** Символом $\dot{L}_2(K)$ обозначаются все функции из $L_2(K)$, продолженные нулем за пределы компакта K .

Легко доказать, что если система $\{u_k\}$ образует след базиса в L_2 в слабом смысле на компакте K (на множестве $\mathcal{D}$), то и система $\{v_k\}$ образует след базиса в L_2 в слабом смысле на компакте K (на множестве $\mathcal{D}$).

Определение 4. Будем говорить, что система $\{u_k\}$ (система $\{v_k\}$) образует на множестве $\mathcal{D}$ след базиса Бесселя, если для любого компакта K множества $\mathcal{D}$ существует постоянная $C(K)$ такая, что для любой функции $f(x)$ из класса $\dot{L}_2(K)$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, u_k)|^2 \leq C(K) (f, f) \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(f, v_k)|^2 \leq C(K) (f, f) \right).$$

Договоримся, наконец, обозначать символом Π полосу $|\operatorname{Im} z| \leq b = \text{const.}$

Теорема 1. Пусть выполнены два условия А:

- 1) $\mu_k \in \Pi$;
- 2) для любого вещественного $\mu \geq 1$ равномерно относительно x на любом компакте K множества $\mathcal{D}$ справедливы оценки

$$\sum_{|\mu_k - \mu| \leq 1} |u_k(x)|^2 = O(1), \quad \sum_{|\mu_k - \mu| \leq 1} |v_k(x)|^2 = O(1).$$

Тогда для того чтобы для любой функции $f(x)$ из класса $\dot{L}_1(\mathcal{D})$ на любом компакте K множества $\mathcal{D}$ имела места равномерная равносходимость разложений $f(x)$ в биортогональный и в тригонометрический ряды, необходимо и достаточно, чтобы одна из систем $\{u_k\}$, $\{v_k\}$ образовывала в $\mathcal{D}$ след базиса в L_2 в слабом смысле.

Теорема 2. Утверждение теоремы 1 останется справедливым, если два условия А заменить следующими двумя условиями Б:

- 1) $\mu_k \in \Pi$;
- 2) справедлива оценка $\mu_k = Mk + O(1)$, где $M = \text{const.}$

Теорема 3. Утверждение теоремы 1 останется справедливым, если два условия А заменить следующими двумя условиями В:

- 1) $\mu_k \in \Pi$;
- 2) каждая из систем $\{u_k\}$ и $\{v_k\}$ образует в $\mathcal{D}$ след базиса Бесселя.

3°. Доказанные теоремы охватывают все ранее известные результаты, касающиеся равносходимости разложений в биортогональный и в тригонометрический ряды, среди которых мы считаем наиболее существенными результаты В. А. Стеклова ⁽¹⁾, Я. Д. Тамаркина ⁽²⁾ и Э. Ч. Титчмарша ⁽³⁾. В частности, теорема 2 охватывает все случаи так называемых регулярных краевых условий (по терминологии ⁽⁴⁻⁶⁾). Более того, доказанные нами теоремы равносходимости впервые устанавливают локальный характер не только требований на разлагаемую функцию $f(x)$, но и требований на коэффициенты дифференциального оператора и функции биортогональной системы.

Вместо оператора (1) можно рассматривать более общий дифференциальный оператор

$$Lu = \sum_{k=0}^n a_k(x) u^{(k)}$$

и для него задачу

$$Lu + \lambda \rho(x) u = 0$$

с весом $\rho(x)$, предполагая лишь, что коэффициенты $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$ и $\rho(x)$ являются достаточно гладкими и что коэффициенты $a_n(x)$ и $\rho(x)$ не вырождаются на подмножестве $\mathcal{D}$. За пределами $\mathcal{D}$ указанные коэффициенты могут быть негладкими и могут вырождаться на целых отрезках.

Метод получения сформулированных результатов имеет мало общего с методами, применявшимися другими авторами. Этот метод является модификацией метода, развитого нами в (7-9) для самосопряженных эллиптических операторов и основанного лишь на формуле среднего значения для регулярного решения соответствующего дифференциального уравнения. Существенную роль играет формула среднего значения, только что установленная по нашему предложению Е. И. Моисеевым (10).

Автор благодарит акад. А. Н. Тихонова, чл.-корр. АН СССР А. В. Бицадзе, В. А. Садовниченко, Ш. А. Алимова, Е. И. Моисеева и В. П. Маслова за обсуждение результатов этой работы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
12 III 1975

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Стеклов, Сообщ. матем. общ., Харьков, (2), т. 10 (2-6), 97 (1907-1909).
² Я. Д. Тамаркин, О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, Петроград, 1917. ³ Э. Ч. Титчмарш, Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. 1, ИЛ, 1960. ⁴ М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, «Наука», 1969. ⁵ Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, Линейные операторы, т. 3, М., «Мир», 1974. ⁶ В. П. Михайлов, ДАН, т. 144, № 5, 981 (1962). ⁷ В. А. Ильин, УМН, т. 23, № 2, 61 (1968). ⁸ В. А. Ильин, Дифференциальные уравнения, т. 9, № 1, 49 (1973). ⁹ В. А. Ильин, Ш. А. Алимов, Там же, т. 10, 3, 481 (1974). ¹⁰ Е. И. Моисеев, ДАН т. 223, № 3 (1975).