

В. Н. ТЕМЛЯКОВ

О НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком С. М. Никольским 1 IV 1975)

Пусть $E_{n,m}(f)_C$ — наилучшие приближения функции $f(x, y)$ тригонометрическими полиномами порядка n по x и порядка m по y в метрике C . Через $E_{n,\infty}(f)_C$ обозначим наилучшие приближения в метрике C функции $f(x, y)$ тригонометрическими полиномами порядка n по переменной x , коэффициенты которых являются функциями от y . Аналогично определяются $E_{\infty,m}(f)_C$, а также соответствующие величины в метриках L_p , $p \geq 1$.

С. Н. Бернштейн ⁽¹⁾ доказал следующее неравенство:

$$E_{n,m}(f)_C \leq A \ln \{2 + \min(n, m)\} [E_{n,\infty}(f)_C + E_{\infty,m}(f)_C], \quad (1)$$

где A — абсолютная постоянная, и отметил, что в аналогичной оценке для приближений в метрике L_2 множитель $\ln \{2 + \min(n, m)\}$ можно опустить.

С. Н. Бернштейн поставил вопрос о возможности замены в оценке (1) $\ln \{2 + \min(n, m)\}$ на абсолютную постоянную.

В дальнейшем было показано ^(2, 3), что оценка вида (1) верна и для метрики L , а для метрик L_p , $1 < p < \infty$,

$$E_{n,m}(f)_{L_p} \leq A_p [E_{n,\infty}(f)_{L_p} + E_{\infty,m}(f)_{L_p}].$$

В настоящей работе будет установлено, что в соотношении (1) и в аналогичном соотношении для метрики L нельзя заменить $\ln \{2 + \min(n, m)\}$ ни на какой множитель, растущий при $\min(n, m) \rightarrow \infty$ медленнее, чем $\ln \{2 + \min(n, m)\}$.

Теорема 1. Существует такая абсолютная постоянная $a > 0$, что для произвольных чисел n и m найдется функция $f_{n,m}(x, y)$, для которой

$$E_{n,m}(f_{n,m})_L \geq a \ln \{2 + \min(n, m)\} [E_{n,\infty}(f_{n,m})_L + E_{\infty,m}(f_{n,m})_L]. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть для определенности $n \leq m$. Положим

$$\begin{aligned} g_{n,m}(x, y) &= e^{i(n+m+1)y} \left[\sum_{k=1}^n \frac{k}{n} e^{ik(x-y)} + \sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{2n-k}{n} e^{ik(x-y)} \right] = \\ &= 2K_{n-1}(x-y) e^{i[nx+(m+1)y]}, \quad K_{n-1}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} \cos kt, \end{aligned}$$

где $K_{n-1}(t)$ — ядро Фейера. Тогда

$$\|g_{n,m}\|_L = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g_{n,m}(x, y)| dx dy = 1. \quad (3)$$

Введем еще функцию

$$h_n(x, y) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^2 e^{i[kx+(n+m+1-k)y]}.$$

Для $\|h_n\|_L$ имеем следующую оценку снизу:

$$\begin{aligned}\|h_n\|_L &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^2 e^{ik(x-y)} \right| dx dy \geq \\ &\geq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^2 \cos k(x-y) \right| dx dy \geq \\ &\geq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x-y)| dx dy - \\ &- \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k^2}{n^2} \right) \cos k(x-y) \right| dx dy,\end{aligned}$$

где $D_n(t)$ — ядро Дирихле. Так как последний интеграл в правой части этого неравенства равномерно ограничен, получаем

$$\|h_n\|_L \geq 1/2 L_n - B, \quad (4)$$

где L_n — константа Лебега, а B — абсолютная постоянная.

Возьмем функцию

$$f_{n,m}(x, y) = e^{i(n+m+1)y} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} e^{ik(x-y)}.$$

Поятно, что $E_{n,\infty}(f_{n,m})_L = 0$. Покажем, что

$$E_{n,m}(f_{n,m})_L \leq 1. \quad (5)$$

В качестве приближающего полинома выберем

$$t_{\infty,m}(x, y) = -e^{i(n+m+1)y} \sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{2n-k}{n} e^{ik(x-y)}.$$

Тогда

$$f_{n,m}(x, y) - t_{\infty,m}(x, y) = g_{n,m}(x, y)$$

и оценка (5) следует из (3).

С другой стороны,

$$E_{n,m}(f_{n,m})_L \geq 1/2 L_n - B. \quad (6)$$

В самом деле, пусть $t_{n,m}(x, y)$ — полином наилучшего в метрике L приближения функции $f_{n,m}(x, y)$ тригонометрическими полиномами порядка n по x и порядка m по y . Тогда

$$\begin{aligned}\left\| \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f_{n,m}(t_1, t_2) - t_{n,m}(t_1, t_2)] g_{n,m}(x-t_1, y-t_2) dt_1 dt_2 \right\|_L \leq \\ \leq \|f_{n,m} - t_{n,m}\|_L \cdot \|g_{n,m}\|_L = \|f_{n,m} - t_{n,m}\|_L.\end{aligned} \quad (7)$$

В то же время выражение, стоящее под знаком нормы в левой части неравенства (7) есть функция $h_n(x, y)$. И из (4) и (7) вытекает (6).

Для завершения доказательства теоремы остается сопоставить неравенства (5) и (6).

Теорема 2. Существует такая абсолютная постоянная $b > 0$, что для произвольных чисел n и m найдется функция $\varphi_{n,m}(x, y)$, для которой

$$E_{n,m}(\varphi_{n,m})_C \geq b \ln \{2 + \min(n, m)\} [E_{n,\infty}(\varphi_{n,m})_C + E_{\infty,m}(\varphi_{n,m})_C]. \quad (8)$$

Доказательство. Как и в теореме 1, будем считать, что $n \leq m$. Пусть

$$\sum_{k_1, k_2 = -\infty}^{\infty} c_{-k_1, -k_2} e^{i(k_1 x + k_2 y)}$$

ряд Фурье функции $\text{sign } h_n(x, y)$, где

$$\text{sign } z = \begin{cases} |z|/z & \text{при } z \neq 0, \\ 0 & \text{при } z = 0. \end{cases}$$

Так как

$$\|h_n\|_L = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_n(x, y) \text{sign } h_n(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 c_{k, n+m+1-k},$$

то в силу (4)

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 c_{k, n+m+1-k} \geq \frac{1}{2} L_n - B. \quad (9)$$

Положим

$$\varphi_{n,m}(x, y) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} c_{k, n+m+1-k} e^{i[kx + (n+m+1-k)y]}.$$

Ясно, что $E_{n, \infty}(\varphi_{n,m})_C = 0$. Покажем, что

$$E_{\infty, m}(\varphi_{n,m})_C \leq 1. \quad (10)$$

Возьмем в качестве приближающего полинома

$$T_{\infty, m}(x, y) = - \sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{2n-k}{n} c_{k, n+m+1-k} e^{i[kx + (n+m+1-k)y]},$$

тогда

$$\begin{aligned} & |\varphi_{n,m}(x, y) - T_{\infty, m}(x, y)| = \\ & = \frac{1}{4\pi^2} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sign } h_n(x+t_1, y+t_2) g_{n,m}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right| \leq \|g_{n,m}\|_L = 1 \end{aligned}$$

и неравенство (10) доказано.

Для $E_{n, m}(\varphi_{n,m})_C$ имеем следующую оценку:

$$E_{n, m}(\varphi_{n,m})_C \geq \frac{1}{2} L_n - B. \quad (11)$$

Действительно, пусть наилучшее приближение $E_{n, m}(\varphi_{n,m})_C$ достигается на полиноме $T_{n, m}(x, y)$. Тогда

$$\frac{1}{4\pi^2} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi_{n,m}(x, y) - T_{n,m}(x, y)] g_{n,m}(-x, -y) dx dy \right| \leq E_{n,m}(\varphi_{n,m})_C,$$

а, с другой стороны, левая часть этого неравенства равна

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 c_{k, n+m+1-k}.$$

Учитывая оценку (9), отсюда получаем (11).

Для завершения доказательства теоремы остается сравнить (10) и (11).

Согласно теоремам 1 и 2, для каждого n найдется своя функция $f_n(x, y)$ такая, что

$$E_{n, n}(f_n)_L \geq a \ln(2+n) [E_{n, \infty}(f_n)_L + E_{\infty, n}(f_n)_L], \quad (12)$$

и аналогично для метрики C .

Покажем, что (12) может иметь место для бесконечно многих n для одной и той же функции $f(x, y)$.

Теорема 3. Существует функция $f(x, y) \in L$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_{n, n}(f)_L}{[E_{n, \infty}(f)_L + E_{\infty, n}(f)_L] \ln n} > 0.$$

Доказательство. Положим

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} f_{2^k, 2^k}(x, y).$$

Из определения $f_{n, m}(x, y)$ и легко проверяемого неравенства $\|f_{n, n}\|_L \leq M \ln(n+2)$, где M — абсолютная постоянная, следует, что

$$E_{2^n, \infty}(f)_L \leq M \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k \ln 2}{k!} \leq \frac{M_1}{n!}. \quad (13)$$

Для оценки $E_{\infty, 2^n}(f)_L$ воспользуемся соотношением (5). Имеем

$$E_{\infty, 2^n}(f)_L \leq \frac{1}{n!} + M \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k \ln 2}{k!} \leq \frac{M_2}{n!}. \quad (14)$$

Из оценки (6) для $E_{2^n, 2^n}(f)_L$ получим

$$E_{2^n, 2^n}(f)_L \geq \frac{1}{n!} E_{2^n, 2^n}(f_{2^n, 2^n}) - M \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k \ln 2}{k!} \geq \frac{L_{2^n} - M_3}{2n!}. \quad (15)$$

Складывая (13) и (14) и сравнивая эту сумму с (15), получим утверждение теоремы.

Точно так же доказывается аналогичное предложение для метрики C .

Теорема 4. Существует функция $\varphi(x, y)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_{n, n}(\varphi)_C}{[E_{n, \infty}(\varphi)_C + E_{\infty, n}(\varphi)_C] \ln n} > 0.$$

Отметим, что все четыре теоремы без труда переносятся на приближение алгебраическими многочленами.

Автор благодарен С. А. Теляковскому и К. И. Осколкову за интересные обсуждения и полезные замечания.

Московский физико-технический институт
Долгопрудный Московской обл.

Поступило
25 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Н. Бернштейн, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 38 (1951).
² М. Ф. Тиман, ДАН, т. 112, № 1 (1957). ³ М. К. Потанов, ДАН, т. 112, № 4 (1957).