

В. Г. КАНОВЕЙ

**О НЕЗАВИСИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ПРЕДЛОЖЕНИЙ
ДЕСКРИПТИВНОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И АРИФМЕТИКИ
ВТОРОГО ПОРЯДКА**

(Представлено академиком П. С. Александровым 11 II 1975)

1. Пусть ZF — теория Цермело — Френкеля, AC — аксиома выбора, $ZFC = ZF + AC$ ((¹), раздел 2), ω — натуральный ряд, $\mathcal{N} = \{x | x \subseteq \omega\}$, c — мощность континуума ((¹), раздел 6), $\mathcal{L}$ — язык арифметики второго порядка с переменными для множеств ((²), гл. 16, п. 2). Для всяких $n \in \omega$ и $z \in \mathcal{N}$ пусть Σ_n^1 , Π_n^1 — обычные обозначения для классов формул $\mathcal{L}$, $\Sigma_n^{1,z}$, $\Pi_n^{1,z}$, $\Delta_n^{1,z}$, Σ_n^1 , Π_n^1 , Δ_n^1 — для соответствующих классов подмножеств пространств вида $\omega^k \times \mathcal{N}^l$, где $k, l \in \omega$ ((²), гл. 16, п. 6). Если $X \subseteq \mathcal{N}$, то пусть

$$\Sigma_n^1(x) = \bigcup \{ \Sigma_n^{1,z} | z \in X \}, \quad \underline{\Sigma}_n^1 = \Sigma_n^1(\mathcal{N})$$

и аналогично Π и Δ .

X называется проективным, если $X \subseteq \bigcup \{ \Sigma_n^1 | n \in \omega \}$. Классы $\underline{\Sigma}_n^1$, $\underline{\Pi}_n^1$, Δ_n^1 совпадают с классами проективной иерархии (см. (³)).

2. Пусть L — класс конструктивных множеств, $V = L$ — аксиома конструктивности, $L[x]$ — класс множеств, конструктивных относительно x , $V = L[x]$ — аксиома относительности конструктивности ((³), разделы 11, 13).

Для $x \subseteq \omega$ положим

$$[x]_L = \{y | y \subseteq \omega \text{ \& } x \in L[y] \text{ \& } y \in L[x]\}$$

степень конструктивности x (см. (⁴)). Назовем $x \subseteq \omega$ L -минимальным, если

$$\forall y [x \subseteq \omega \text{ \& } y \in L[x] \rightarrow y \in LVx \subseteq L[y]] \text{ \& } x \notin L.$$

В (⁵) Сакс построил модель для

$$\exists x [x \subseteq \omega \text{ \& } V = L[x] \text{ \& } x \text{ } L\text{-минимально}],$$

в (⁶) Енсен построил модель для

$\exists x [x \subseteq \omega \text{ \& } V = L[x] \text{ \& } x \text{ } L\text{-минимально} \text{ \& } \{x\} \in \Pi_2^1 \text{ (откуда, очевидно, } x \in \Delta_3^1 \text{, см. (⁶))}]$.

Для всякого $n \in \omega$ обозначим через $\mathcal{A}_n^1$ предложение

$$\exists x [x \subseteq \omega \text{ \& } V = L[x] \text{ \& } x \text{ } L\text{-минимально} \text{ \& } \{x\} \in \Pi_n^1] \text{ \& } \forall y$$

$$\forall z [y \in L \cap \mathcal{N} \text{ \& } z \in \mathcal{N} \cap \Sigma_n^{1,y} \rightarrow z \in L \text{ \& } L \models [z \in \Sigma_n^{1,y}]],$$

а через $\mathcal{A}_n^2$ — предложение

$$\exists x [x \in \mathcal{N} - L \text{ \& } x \in \Delta_{n+1}^1].$$

Теорема 1. Предложение $\mathcal{A}_n^1$ несовместимо с ZF при $n < 2$ и совместно при $n \geq 2$.

Следствие 1. При $n < 2$ предложение $\mathcal{A}_n^2$ несовместимо с ZF, при $n \geq 2$ — совместно, причем в $ZFC + \mathcal{A}_{n+1}^2$ не выводимо $\mathcal{A}_n^2$.

Замечание 1. В (7) доказано, что

$$ZF \vdash \forall x \forall y [x, y \in \mathcal{N} \& x \in L \& y \in \Sigma_2^{1,x} \rightarrow y \in L \& L \models [y \in \Sigma_2^{1,x}]],$$

поэтому при $n=2$ теорема 1 следует из (6).

3. Назовем X D -множеством, если X бесконечно, но конечно по Дедекинду (т. е. не содержит счетных подмножеств, см. (1), раздел 5). Известно, что $ZFC \vdash \forall X [X \text{ — не } D\text{-множество}]$, но $ZF + \exists X [X \text{ — } D\text{-множество}]$ не противоречиво (см. (1), разделы 5, 6, 25). Если $n \in \omega$, то обозначим через $\mathcal{A}_n^3$ предложение

$$\exists X [X \subseteq \mathcal{N} \& X \text{ — } D\text{-множество} \& X \in \Pi_n^1] \& \forall X [X \subseteq \mathcal{N} \& X \in \Sigma_n^1 \rightarrow X \text{ — не } D\text{-множество}].$$

Теорема 2. Предложение $\mathcal{A}_n^3$ несовместимо с ZF при $n < 2$ и совместно при $n \geq 2$.

Следствие 2. $\exists X [X \subseteq \mathcal{N} \& X \in \Pi_2^1 \& X \text{ — } D\text{-множество}]$ совместно с ZF.

Теорема 3. $ZF \vdash \forall X [X \subseteq \Sigma_2^1 \& X \subseteq \mathcal{N} \rightarrow X \text{ — не } D\text{-множество}]$.

4. Пусть K — любой класс, $X \subseteq \mathcal{N}$, $Y \subseteq \mathcal{N}$, $Z \subseteq \mathcal{N}$. Множества X и Y назовем K -неразличимыми, если

$$\forall H [H \in K \& H \subseteq \mathcal{N} \rightarrow [X \cap H = \emptyset \equiv Y \cap H = \emptyset]],$$

и K -различимыми в противном случае. Множество Z назовем K -счетным, если

$$\exists z [z \in K \cap \mathcal{N} \& Z = \{(z)_n \mid n \in \omega\}],$$

где $(z)_n = \{k \mid 2^n(2k+1) - 1 \in z\}$ для $z \in \mathcal{N}$ и $n \in \omega$.

Для всякого $n \in \omega$ обозначим через $\mathcal{A}_n^4$ предложение

$$\exists x \exists y [x \in \mathcal{N} \& y \in \mathcal{N} \& x, y \text{ — } L\text{-минимальны} \& [x]_L \text{ и } [y]_L \Sigma_n^1(\mathcal{N} \cap L)\text{-неразличимы, но } \Pi_n^1\text{-различимы}],$$

а $\mathcal{A}_n^5$ — предложение

$$\begin{aligned} &\exists X [X \subseteq \mathcal{N} \& X \text{ счетно} \& X \in \Pi_n^1 \& \forall m [m \in \omega \rightarrow \\ &\sim [X \cap \Sigma_m^1(X) \text{ — счетно}]]] \& \forall Y \forall y [Y \subseteq \mathcal{N} \& y \in \\ &\in \mathcal{N} \& Y \in \Delta_n^{1,y} \rightarrow Y \Delta_{n+1}^{1,y} \text{ — счетно}]. \end{aligned}$$

Теорема 4. Предложение $\mathcal{A}_n^4$ несовместимо с ZF при $n < 2$ и совместно при $n \geq 2$.

Замечание 2. Из результатов (7) легко следует

$$ZF \vdash \forall x \forall y [x, y \in \mathcal{N} \rightarrow [x]_L \text{ и } [y]_L \Sigma_2^1\text{-неразличимы}].$$

Теорема 5. $ZF + V = L \vdash \forall n \forall x \forall X [n \in \omega \& n \geq 1 \& x \in \mathcal{N} \& X \subseteq \mathcal{N} \& X \text{ счетно} \& X \in \Delta_n^{1,x} \rightarrow X \Delta_{n+1}^{1,x} \text{ — счетно}].$

Теорема 6. Предложение $\mathcal{A}_n^5$ несовместимо с ZF при $n < 2$ и совместно при $n \geq 2$.

5. Для всякого класса K обозначим через $WO(K)$ предложение

$$\exists X [X \in K \& X \text{ полное упорядочение } \mathcal{N}],$$

для всякого $n \in \omega$ обозначим через $\mathcal{A}_n^6$ предложение

$$WO(\Delta_{n+1}^1) \& \sim WO(\Sigma_n^1).$$

Пусть V — класс всех множеств.

З а м е ч а н и е 3. $ZFC \vdash WO(V)$ (см. ⁽¹⁾, раздел 7); $ZF+V=L \vdash WO(\Delta_2^1)$ (см. ⁽³⁾); $WO(\Delta_3^1) + [c > \omega_1]$ совместимо с ZF (см. ^(8, 9)).

Т е о р е м а 7. Предложение $\mathcal{A}_0$ ⁶ несовместимо с ZF , $\mathcal{A}_1$ ⁶ выводится из $ZF+V=L$, при $n \geq 2$ предложение $\mathcal{A}_n$ ⁶ совместимо с ZFC .

6. Пусть A_2 — совокупность аксиом Пеано для $\mathcal{L}$ (⁽²⁾, гл. 16). Для всякого класса K формул $\mathcal{L}$ обозначим через $AC(K)$ схему аксиом

$$\forall n \exists x B(n, x) \rightarrow \exists x \forall n B(n, (x)_n),$$

а через $DC(K)$ — схему аксиом

$$\forall x \exists y C(x, y) \rightarrow \forall x \exists y \forall n [(y)_0 = x \& C((y)_n, (y)_{n+1})],$$

где $B(n, x)$, $C(x, y)$ — формулы из K (содержащие, возможно, другие свободные переменные помимо написанных), x, y — переменные по элементам $\mathcal{N}$, n — переменная по элементам ω , не содержащаяся в C ; K_0 — класс всех формул $\mathcal{L}$.

Т е о р е м а 8. Для всякого $n \geq 2$ найдутся такие $\Phi_1 \in AC(\Pi_n^1)$ и $\Phi_2 \in DC(\Pi_n^1)$, что $AC(\Sigma_n^1) \cup \{\sim \Phi_1\}$ и $AC(K_0) \cup DC(\Sigma_n^1) \cup \{\sim \Phi_2\}$ совместимы с ZF .

З а м е ч а н и е 4. $A_2 \vdash AC(\Sigma_2^1)$; $A_2 \vdash DC(\Sigma_2^1)$ (см. ⁽¹⁰⁾).

З а м е ч а н и е 5. При $n=2$ утверждение теоремы 8 объявлено в ⁽¹⁰⁾.

Автор благодарен проф. В. А. Успенскому и В. Н. Гришину за ценную помощь.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
23 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Т. Йех, Теория множеств и метод форсинга, М., «Мир», 1973. ² Х. Роджерс, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., «Мир», 1972. ³ J. W. Addison, Fund. Math., v. 46, 337 (1959). ⁴ В. Г. Кановей, ДАН, т. 216, № 4, 728 (1974). ⁵ G. E. Sacks, Proc. Symp. Pure Math., v. 13, № 1, 331 (1971). ⁶ R. B. Jensen, Definable Set of Minimal Degree, Math. Logic and Found. of Set Theory, North—Holl., Amsterdam, 1971, p. 122. ⁷ J. R. Shoenfield, The Problem of Predicativity. Essays on Found. of Math., Jerusalem, 1961, p. 132. ⁸ В. Г. Кановей, Определимость с помощью степеней конструктивности, Третья Всесоюз. конфер. по математической логике. Новосибирск, 1974, стр. 92. ⁹ L. A. Harrington, Not. Am. Math. Soc., v. 151, A—23 (1974). ¹⁰ S. G. Simpson, ibid., v. 147, A—499 (1973).