

Б. Э. ШАПИРОВСКИЙ

О ВЛОЖЕНИИ ЭКСТРЕМАЛЬНО НЕСВЯЗНЫХ ПРОСТРАНСТВ В БИКОМПАКТЫ. b-ТОЧКИ И ВЕС ТОЧЕЧНО НОРМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 13 III 1975)

Эта работа близка по методу и проблематике к работам Б. А. Ефимова⁽⁷⁻⁹⁾, ряд оценок из которых здесь улучшается (ср., например, теоремы 4—9 из⁽⁷⁾ и теоремы 2, 3, 4 нашей работы). Важную роль в работе играют понятия точки-бабочки (*b*-точки) и индекса $i(X)$ пространства X . Все отображения предполагаются непрерывными, все пространства — бесконечными и регулярными; βN — стоун-чеховская бикомпактификация натурального ряда, pX — абсолют пространства X (см. ⁽⁶⁾), $I=[0, 1]$ и $D=\{0, 1\}$ — обычные отрезок и двоеточие соответственно. Относительно неразъясненных обозначений и понятий см. ^(1, 7, 13).

Определение 1. Точку $x \in X$ назовем *b*-точкой в X , если существуют замкнутые в X множества F_1 и F_2 такие, что $\{x\} = [F_1 \setminus \{x\}] \cap [F_2 \setminus \{x\}]$.

Точка x — *nb*-точка, если x не является *b*-точкой; x — *hb*-точка в X , если x — *b*-точка в F для всякого замкнутого $F \subset X$, $x \in [F \setminus \{x\}]$.

Пусть $A \subset X$. Положим $\mathcal{F}(A, X) = \{K \subset X: K \supset A, [K \setminus A] = K\}$, $\mathcal{K}(A, X) = \{[U] \subset X: [U] \supset A, U \text{ открыто в } X\}$.

Будем говорить, что семейство $\mathcal{E}$ — сеть (псевдосеть) множества A в X , если для всякого замкнутого $F \subset X \setminus A$ (для всякого $x \in X \setminus A$) существует $E \in \mathcal{E}$ такое, что $A \subset E \subset X \setminus F$ ($A \subset E \subset X \setminus \{x\}$). Сеть (псевдосеть) $\mathcal{H}$ множества F в X назовем *b*-сетью (*b*-псевдосетью) если $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}(F, X)$; и, соответственно, Δ -сетью (Δ -псевдосетью), если $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}(F, X)$; Δ -сеть (Δ -псевдосеть) $\mathcal{H}$ назовем δ -сетью (δ -псевдосетью), если $[\cap \{\text{Int } H: H \in \mathcal{H}\}] \supset F$ для всякого конечного подсемейства $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}^*$.

Положим $b\chi(F, X) = \min \{|\mathcal{H}|: \mathcal{H} \text{ — } b\text{-сеть } F \text{ в } X\}$ — *b*-характер F в X , и $b\psi(F, X) = \min \{|\mathcal{H}|: \mathcal{H} \text{ — } b\text{-псевдосеть } F \text{ в } X\}$ — *b*-псевдохарактер F в X . Аналогично определяются $\Delta\psi(F, X)$ и $\delta\psi(F, X)$. Таким образом, x — *b*-точка в X , если $b\psi(x, X) = 2$, и π -точка в X , если $\Delta\psi(x, X) = 2$. Справедливо следующее простое

Утверждение 1. Пусть x — *nb*-точка в X . Тогда $\aleph_0 \leq b\psi(x, X) = \min \{|\mathcal{H}|: \mathcal{H} \subset \mathcal{F}(x, X), \cap \mathcal{H} = \{x\}, \mathcal{H} \text{ — вполне упорядоченное по убыванию семейство}\}$ и, следовательно, $b\psi(x, X)$ — регулярный кардинал; если, кроме того, X — бикомпакт, то $b\chi(x, X) = b\psi(x, X) \geq \aleph_1$.

Центральную роль далее играет следующая кардинальная характеристика: $i(X) = \sup \{\tau: \text{существует отображение } f: X \rightarrow I^\tau\}$ — индекс пространства X , $\nabla i(X) = \min \{\tau: \text{не существует отображения } f: X \rightarrow I^\tau\}$. Очевидно, что $i(X) \leq \nabla i(X) \leq i(X)^+$. Кроме того всегда $i(X) \leq w(X)$, поскольку $w(I^\tau) \leq w(X)$ при $I^\tau = f(X)$ ⁽²⁾ и $w(I^\tau) = \tau$.

Утверждение 2. Пусть X — бикомпакт. Тогда $i(X) \leq t(X)$.

Доказательство. Ясно, что пространство ординалов $\Omega(\tau+1) \subset I^\tau$ и $t(\Omega(\tau)) = \tau$, откуда следует, что $t(I^\tau) = \tau$ (это вытекает и из общих резуль-

* Специально по поводу определений Δ -(псевдо)базы и δ -(псевдо)базы см. ^(13, 12). Отметим только, что в случае нормального пространства X семейство $\mathcal{B}$ — Δ -база (δ -база) множества F в X тогда и только тогда, когда $[\mathcal{B}]$ — Δ -сеть (δ -сеть) F в X . $\delta\chi(A, X) = \min \{|\mathcal{B}|: \mathcal{B} \text{ — } \delta\text{-база } A \text{ в } X\}$. Легко показать, что $\delta\chi(A, X) = \delta\psi(A, X)$ при бикомпактвом X .

татов ⁽³⁾). Но тогда $\tau = t(I^r) \leq t(X)$ при $I^r = f(X)$ ⁽⁵⁾, что и влечет $i(X) \leq t(X)$.

Определение 2. π -Базу $\mathcal{B}$ множества F в X назовем π -базой F в X , если семейство $\mathcal{F} = \{F \cap U: U \in \mathcal{B}\}$ — π -база в F , не содержащая пустых множеств.

Утверждение 3. Пусть X — бикомпакт и F замкнуто в X . Тогда для того, чтобы существовала π -база $\mathcal{F}$ множества F в X , для которой $|\mathcal{F}| \leq \tau$, необходимо и достаточно, чтобы существовало отображение $f: X \rightarrow I^r$ такое, что: 1) $\tilde{f} = f|_F$ неприводимо относительно F (см. ⁽¹³⁾); 2) $f' = f|_F$ неприводимо в F .

Доказательство достаточности (необходимость для дальнейшего несущественна). Пусть $G = f(F)$, $\mathcal{B}$ — стандартная база в I^r , $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{B}: U \cap G \neq \emptyset\}$ и $\mathcal{F} = f^{-1}(\mathcal{U})$. Тогда $\mathcal{F}$ — π -база F в X и $\mathcal{F}' = \{U \cap F: U \in \mathcal{F}\}$ не содержит пустых множеств в силу 1) и $\mathcal{F}'$ — π -база в F в силу 2). Таким образом, $\mathcal{F}$ — искомая π -база F в X .

Предложение 1. Пусть X — бикомпакт. Тогда существуют бикомпакт $F \subset X$ и семейство $\mathcal{B}$ — π -база F в X такие, что $c(F) \leq \aleph_0$, $|\mathcal{B}| < \nabla i(X)$ и тем более $|\mathcal{B}| \leq i(X)$.

Доказательство. Предположим противное, и пусть $\nabla i(X) = \tau$ и для всех $\alpha < \alpha' < \tau$ уже определены отображения $f_\alpha: X \rightarrow I_\alpha = I$ и (при $\alpha \neq 0$) $g_\alpha = \Delta\{f_\beta: \beta < \alpha\}: X \rightarrow I^\alpha = \Pi\{I_\beta: \beta < \alpha\}$ такие, что: а) $g_\alpha f_{\alpha^{-1}}(0) \supset D^\alpha \subset \subset g_\alpha f_{\alpha^{-1}}(1)$, где $I^\alpha \supset D^\alpha = \Pi\{D_\beta: \beta < \alpha\}$ и $D_\beta = D = \{0, 1\}$ для всех β . Положим $g_{\alpha'} = \Delta\{f_\alpha: \alpha < \alpha'\}: X \rightarrow I^{\alpha'}$. В силу бикомпактности X и условия а) $g_{\alpha'}(X) \supset \supset D^{\alpha'}$. Ясно также, что существует замкнутое $F \subset H = g_{\alpha'}^{-1}(D^{\alpha'})$ такое, что $g_{\alpha'}|_F$ неприводимо. Далее, существует открытое в H множество $V \supset F$, для которого $g_{\alpha'}^+(V) = \emptyset$ (иначе по утверждению 3 F — искомое множество, так как $c(F) = c(D^{\alpha'}) \leq \aleph_0$ и $\alpha' < \tau$). Тогда отображение $f_{\alpha'}: X \rightarrow I_{\alpha'} = I$, для которого $f_{\alpha'}(F) = 1$ и $f_{\alpha'}(H \setminus V) = 0$, отвечает (вместе с $g_{\alpha'}$) условию а). Таким образом, построено отображение $f = \Delta\{f_\alpha: \alpha < \tau\}: X \rightarrow I^r$, для которого, очевидно, $D^r \subset f(X)$. Но легко видеть, что тогда существует отображе-

ние $h: X \xrightarrow{\text{на}} I^r$ (см., например, ⁽⁷⁾), что и приводит к противоречию, поскольку $\tau = \nabla i(X)$.

Пусть $\mathcal{A}$ — семейство множеств из X и $Y \subset X$. Положим $u(\mathcal{A}, Y) = \min\{\tau: \text{для всякого } \mathcal{E} \in \mathcal{A} \text{ существует } \mathcal{E}' \subset \mathcal{E} \text{ такое, что } [Y \cap \mathcal{E}] = [\mathcal{E}' \cap Y] \text{ и } |\mathcal{E}'| \leq \tau\}$. Ясно, что всегда $u(\mathcal{A}, Y) \leq |\mathcal{A}|$. Кроме того, если $\mathcal{P}_X = \{\{x\}: x \in X\}$ и $\mathcal{B}$ — π -база в X , то $u(\mathcal{P}_X, X) = \bar{s}(X)$ и $u(\mathcal{B}, X) = c(X)$. Для дальнейшего важно очевидное

Утверждение 4. Пусть $Y \subset X$ и $\mathcal{F}$ — семейство открытых в X множеств. Тогда $u(\mathcal{F}, Y) \leq c(Y)$.

Лемма 1. Пусть бикомпакт $F \subset Y \subset X$, $\mathcal{B}$ — π -база F в X такая, что $U \cap Y \neq \emptyset$ для всех $U \in \mathcal{B}$ и $u(\mathcal{B}, Y) \leq \tau$. Тогда существует непустое $H \subset F$, для которого $\delta\phi(H, X) \leq |\mathcal{B}|^r$.

Доказательство. Для всякого открытого в X множества $V \supset F$ положим $B(V) = \bigcup\{U \in \mathcal{B}: U \subset V\}$ и зафиксируем множество $D(V) \in \bigvee_r \mathcal{B}$, для которого $[Y \cap B(V)] = [Y \cap D(V)]$; $D(V)$ существует, ибо $u(\mathcal{B}, Y) \leq \tau$ (по поводу $\bigvee_r \mathcal{B}$ и $\bigvee_r \mathcal{B}$ см. ⁽¹¹⁾), аналогично определяются $\bigwedge_r \mathcal{B}$ и $\bigwedge_r \mathcal{B}$. Положим $\mathcal{F}' = \{D(V): V \text{ открыто в } X \text{ и } V \supset F\}$, $\mathcal{F}$ — семейство всех попарно различных (как множества) элементов из $\mathcal{F}'$, и $\mathcal{H} = \{[U]: U \in \bigwedge_{\omega} \mathcal{F}\}$. Поскольку $B(V_1) \cap B(V_2) \supset B(V)$ при $V = V_1 \cap V_2 \supset F$, и $[Y \cap B(V)] \cap F \neq \emptyset$, то легко видеть, что $\mathcal{F}$ — центрированное семейство, $H = \bigcap \mathcal{H} \neq \emptyset$ и $H \subset F$. Таким образом, $\mathcal{H}$ — δ -псевдосеть H в X и $|\mathcal{H}| = |\mathcal{F}| \leq |\mathcal{B}|^r$. Заметим также, что $\mathcal{B}$ — π -база H в X , а $\mathcal{F}$ — δ -база H в X в каждом из следующих случаев: 1) $H = F$, 2) X — бикомпакт; причем в случае 1) бикомпактность F несущественна. Поэтому, положив в условиях леммы 1 $Y = X$, получаем

Утверждение 5. Пусть $F \subset X$ и $\mathcal{B}$ — π -база F в X . Тогда $\delta\chi(F, X) \leq \min\{2^{|\mathcal{B}|}, |\mathcal{B}|^{c(X)}\}$.

Утверждение 5'. Пусть $x \in X$. Тогда $\delta\chi(x, X) \leq 2^{-\tau(x, X)}$ ⁽⁷⁾ и $\delta\chi(x, X) \leq \pi\chi(x, X)^{c(X)}$.

Утверждение 6. Пусть X — бикомпакт, F замкнуто в X и $\pi\chi(F, X) \leq \tau$. Тогда существует непустое $H \subset F$ такое, что $\delta\chi(H, X) \leq \tau^{c(X)}$ ⁽⁷⁾, $\delta\chi(H, X) \leq 2^\tau$ и $\text{spl}\chi(H, X) \leq \tau$.

Отметим также очевидное

Утверждение 7. Пусть $x \in H \subset X$. Тогда $\delta\chi(x, X) \leq \chi(x, H) \cdot \delta\chi(H, X)$.

Предложение 2. Пусть X — бикомпакт, F замкнуто в X и B — пл-база F в X . Тогда существует $x \in F$ такая, что $\delta\chi(x, X) \leq |\mathcal{B}|^{c(F)}$.

Доказательство. В силу утверждения 4 и $(\mathcal{B}, F) \leq c(F)$ и по лемме 1 (при $Y=F$) существует непустое $H \subset F$ такое, что $\delta\chi(H, X) \leq |\mathcal{B}|^{c(F)} = \tau$. Кроме того, $\text{pw}(F) \leq |\mathcal{B}|$, и, следовательно, $w(H) \leq w(F) \leq \tau$, откуда по утверждению 7 и получаем: $\delta\chi(x, X) \leq \tau$ для всех $x \in H$.

Далее существенно используется следующий результат автора из ⁽¹¹⁾: R_1 . Пусть $Y \subset X$ и $[Y] = X$. Тогда $w(X) \leq w_1(X) \leq \pi\chi(Y)^{c(X)}$.

Из предложений 1 и 2, R_1 и утверждения 2 следует

Теорема 1. Пусть X — бикомпакт. Тогда $X = [\{x \in X: \delta\chi(x, X) \leq i(X)^{\aleph_0} \leq t(X)^{\aleph_0}\}]$ и $w_1(X) \leq i(X)^{c(X)} \leq t(X)^{c(X)}$.

Следствие 1. Если X — бикомпакт и $t(X) \leq \tau$, то $X = [\{x \in X: \delta\chi(x, X) \leq \tau\}]$ и $w_1(X) \leq 2^{c(X)}$.

Заключение теоремы 1 справедливо и для всякого замкнутого $F \subset X$, поскольку $i(F) \leq i(X)$ в случае нормального X . Кроме того, уточнением теоремы 1, также вытекающим из предложений 1 и 2, является

Теорема 1'. Пусть X — бикомпакт, $\nabla i(X) \leq \tau$ и τ — $\aleph_0$ -недостижим. Тогда $X = [\{x \in X: \delta\chi(x, X) < \tau\}]$.

Кардинал τ называется λ -недостижимым ⁽⁷⁾, если $\tau^{1/\lambda} = \tau$, где $\tau^{1/\lambda} = \min \{\mu: \mu^\lambda \geq \tau\}$. Очевидно, что $\tau^{1/\lambda}$ — λ -недостижим. Отметим также, что всякий кардинал $\tau = (\mu^\lambda)^+$ при любом $\mu \geq 2$ является λ -недостижимым и, кроме того, λ -допустимым ⁽⁷⁾, т. е. $\tau^\lambda = \tau$. В частности, $(i(X)^{\aleph_0})^+ — \aleph_0$ -недостижимый и $\aleph_0$ -допустимый кардинал. Следуя ⁽⁷⁾, положим $\delta\chi_0(X) = \min \{\delta\chi(x, X): x \in X\}$ — нижний δ -характер X ($\delta\chi_0(X)$ тождествен также $m(X)$ из ⁽⁷⁾), и $\delta\chi_0'(X) = \sup \{\delta\chi_0(F): F \text{ замкнуто в } X\}$.

Из теорем 1 и 1' получаются следующие утверждения.

Теорема 2°. Пусть X — бикомпакт, и $\delta\chi_0(X) \geq \tau$. Тогда $\nabla i(X) > \tau^{1/\aleph_0}$.

Теорема 2. Пусть X — бикомпакт, $\delta\chi_0(X) \geq \tau$ и τ — $\aleph_0$ -недостижимый кардинал. Тогда существует отображение $f: X \rightarrow \Gamma$.

Хорошо известен следующий важный факт (см. ^(6, 7)):

Φ_1 . Если существует совершенное отображение $f: X \rightarrow \Gamma$, то X содержит все экстремально несвязные (э.н.) пространства веса $\leq \tau$.

Из теоремы 2 и Φ_1 немедленно следует

Теорема 2'. Пусть X — бикомпакт, $\delta\chi_0'(X) > \tau$ (пусть, например, $\delta\chi_0(X) > \tau$) и $\tau^{\aleph_0} = \tau$. Тогда X отображается на Γ^* , и, следовательно, содержит все э.н. пространства веса $\leq \tau^+$, в частности, $\beta\Gamma^*$.

Следствие 2. Если X — бикомпакт и $\delta\chi(x, X) > \tau$ для всех $x \in X$, то X содержит все э.н. пространства веса $\leq \tau^+$, в частности, βN и $\beta\Gamma^+$.

Из теоремы 2' и R_1 вытекает

Теорема 3. Пусть X — бикомпакт, $c(X) \leq \tau$ и $w_1(X) > 2^\tau = \mu$. Тогда X отображается на Γ^* и, следовательно, содержит все э.н. пространства веса $\leq \mu^+$, в частности, βN и $\beta\Gamma^*$.

Следствие 3. Если X — бикомпакт с условием Суслина и веса $> \tau$, то X содержит все э.н. пространства веса $\leq \tau^+$, в частности, βN и $\beta\Gamma^+$.

Теорема 4°. Пусть X — диадический бикомпакт. Тогда $w(X) = i(X)$.

Доказательство. В силу предложения 1 и результатов из ⁽¹⁵⁾ существуют бикомпакт $F \subset X$ и $\mathcal{B}$ — пл-база F в X такие, что $w(F) = |\mathcal{B}| \leq i(X)$ (см. также ⁽⁹⁾). Тогда по утверждению 6 и утверждению 5 из ⁽¹³⁾ $X = [\{x: \pi\chi(x, X) \leq i(X)\}]$, и в силу теоремы 1 из ⁽⁹⁾ $w(X) \leq i(X)$.

Если x — nb -точка в X , то $\cap \mathcal{F}' \in \mathcal{F}(x, X)$ для всякого $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}(x, X)$ такового, что $|\mathcal{F}'| < b\psi(x, X)$. С другой стороны, если $\{K \cap F: F \in \mathcal{F}'\}$ — псевдо-сеть x в $K \in \mathcal{F}(x, X)$, то $\cap \mathcal{F}' \notin \mathcal{F}(x, X)$. Сказанное влечет

Утверждение 8. Пусть x — nb -точка в X . Тогда, если $K \in \mathcal{F}(x, X)$, то $\psi(x, K) = \psi(x, X) \geq \text{cf}(\psi(x, X)) \geq b\psi(x, X) = b\psi(x, K)$.

Утверждение 9. Если x — nb -точка в X и $K \in \mathcal{F}(x, X)$, то $\psi(x, X) \leq 2^{s(K)}$.

Положим $N(X) = \{x \in X: X \setminus \{x\} \text{ нормально}\}$, $B(X) = \{x \in X: x - b\text{-точка в } X\}$. Пространство X точечно нормально, если $X = N(X)$. Очевидно, что $X \setminus B(X) \subset N(X)$ в случае нормального X , и $X \setminus B(X) = N(X)$, если X , кроме того, э.н. пространство. Поэтому, утверждение 9 влечет

Предложение 3. Пусть X — бикомпакт и $A(X) = \{x \in X: \chi(x, X) \leq \leq c\}$. Тогда $X = [A(X) \cup B(X)]$, и если $t(X) \leq \aleph_0$, то $X = A(X) \cup B(X)$.

Предложение 3'. Пусть X — бикомпакт и $w_1(X) > 2^{c(X)}$. Тогда $\text{Int}[B(X)] \neq \Lambda$, и если X — э.н. пространство, то $X \setminus N(X) \neq \Lambda$.

Таким образом, ρ^{I^+} имеет точки ненормальности и справедлива

Лемма 2. Пусть X — точечно нормальный бикомпакт. Тогда $i(X) \leq c$.

В связи с этим отметим также (без доказательства)

Предложение 5. Пусть X — э.н. бикомпакт и $\chi(x, X) = \aleph_1$. Тогда x — hb -точка в X и, следовательно, x — точка ненормальности.

Таким образом, в предположении СН (и даже в предположении АМ, см. ⁽¹⁰⁾, п. 2) $\nabla i(X) \leq c$ для всякого точечно нормального бикомпакта X . *

Выделим еще один класс пространств, не содержащих βN , и для которых, следовательно, $\nabla i(X) \leq c$.

Определение 3. Пространство X назовем слабо секвенциальным, если всякий бесконечный бикомпакт $F \subset X$ содержит нетривиальную сходящуюся последовательность.

Слабо секвенциальными, очевидно, являются κ -пространства (в смысле ⁽⁵⁾), секвенциальные, c -секвенциальные и секвенциально компактные пространства. Из сказанного выше и теоремы 1 следует

Теорема 4. Пусть X — бикомпакт и выполняется хотя бы одно из следующих условий: а) X точечно нормален; б) X слабо секвенциален. Тогда $X = [\{x \in X: \delta\chi(x, X) \leq c\}] \cup w_1(X) \leq 2^{c(X)}$.

Следствие 4. Если X — слабо секвенциальный (или точечно нормальный) бикомпакт с условием Суслина, то $w_1(X) \leq c$.

Автор глубоко признателен проф. А. В. Архангельскому за внимание и поддержку.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
24 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. В. Архангельский, В. И. Пономарев, Основы общей топологии в задачах и примерах, М., 1974. ² А. В. Архангельский, ДАН, т. 126, № 2 (1959). ³ А. В. Архангельский, ДАН, т. 184, № 4 (1969). ⁴ А. В. Архангельский, ДАН, т. 192, № 2 (1970). ⁵ А. В. Архангельский, В. И. Пономарев, ДАН, т. 182, № 5 (1968). ⁶ В. И. Пономарев, УМН, т. 21, № 4 (1966). ⁷ В. А. Ефимов, Тр. Московск. матем. о-ва, т. 23 (1970). ⁸ В. А. Ефимов, ДАН, т. 189, № 2 (1969). ⁹ В. А. Ефимов, ДАН, т. 185, № 5 (1969). ¹⁰ В. И. Малыгин, Б. Э. Шапировский, ДАН, т. 213, № 3 (1973). ¹¹ Б. Э. Шапировский, ДАН, т. 218, № 1 (1974). ¹² В. А. Ефимов, Матем. сб., т. 96, № 4 (1975). ¹³ Б. Э. Шапировский, ДАН, т. 223, № 4 (1975). ¹⁴ В. В. Федорчук, ДАН, т. 222, № 2 (1975). ¹⁵ R. Engelking, A. Pelczynski, Coll. Math., v. 11, 55, 1963.

* Автору удалось показать (не используя дополнительных аксиоматических средств), что βN содержит точки ненормальности. Поэтому $\nabla i(X) \leq c$ для точечно нормального бикомпакта X и, в силу предложения 1, существует сепарабельный бикомпакт $F \subset X$ с π -базой $\mathcal{B}$ такой, что $|\mathcal{B}| < c$. (Заметим, что множество F из предложения 1 есть неприводимый прообраз D^τ , где $\tau = |\mathcal{B}| < \nabla i(X)$.)