

УДК 517.948.3

МАТЕМАТИКА

В. М. КОКИЛАШВИЛИ

О СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛАХ И МАКСИМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ С ЯДРОМ КОШИ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 10 I 1975)

Пусть X — пространство с мерой ν . Рассмотрим квазилинейный оператор $\Phi = \Phi f$, где f и Φ определены на X . Φ называется оператором сильного типа (p, p) , если он ограничен в $L_{p, \nu}(X)$. Оператор Φ называется оператором слабого типа (p, p) , если

$$\nu\{x: |(\Phi f)(x)| > \lambda\} \leq \frac{M}{\lambda^p} \int_X |f(x)|^p d\nu,$$

где M не зависит от f и λ , $\lambda > 0$.

Если ν — мера Лебега (в последующем обозначим ее через m), то в силу известной теоремы М. Рисса ⁽¹⁾ оператор сопряжения

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+u) du}{2 \operatorname{tg}^{1/2} u}$$

имеет сильный тип (p, p) для произвольного p , $1 < p < +\infty$. А. Н. Колмогоров ⁽²⁾ доказал, что $\tilde{f}$ — операция слабого типа $(1, 1)$.

Пусть теперь $t=t(s)$ — уравнение замкнутой жордановой кривой Γ комплексной плоскости. Сингулярный интеграл

$$(S_{\Gamma} f)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - t}$$

понимается в смысле главного значения по Коши. Наряду с оператором S_{Γ} будем рассматривать также максимальный оператор с ядром Коши

$$(T_{\Gamma} f)[t(s)] = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\pi > |s-\sigma| > \varepsilon} \frac{f[t(\sigma)] t'(\sigma) d\sigma}{t(\sigma) - t(s)} \right|$$

1. Б. В. Хведелидзе ⁽⁴⁾ обобщил теорему М. Рисса для оператора S_{Γ} в случае, когда Γ — кривая Ляпунова. Впоследствии распространению теорем М. Рисса, Колмогорова, Зигмунда ⁽³⁾ для различных классов кривых был посвящен ряд работ, например ⁽⁵⁻⁹⁾ и др. Обращало на себя внимание то обстоятельство, что условия, налагаемые на кривые, например в аналогах теорем М. Рисса и Колмогорова, порою различались, точнее, ограничения на кривую Γ в аналогах теоремы М. Рисса были более обременительными. С другой стороны, для определенного класса кривых был известен лишь аналог теоремы М. Рисса. Естественно, возникал вопрос о выяснении связи между наличием сильного типа (p, p) , $k p < +\infty$, и слабого типа $(1, 1)$. Это должно было бы дать также новую информацию о допустимых кривых в вышеупомянутых теоремах. На поставленные вопросы удалось ответить для кривых с условием хорды.

Определение 1. Спрямляемая замкнутая жорданова кривая называется кривой с условием хорды, если существует такая постоянная $k > 0$, что $|t_1 - t_2| \geq k l(t_1, t_2)$, где $l(t_1, t_2)$ — длина наименьшей дуги линии Γ с концами t_1 и t_2 .

Определение 2. Кривая Γ принадлежит классу $\bar{R}_p (R_p)$, $1 < p < +\infty$, если оператор $T_\Gamma (S_\Gamma)$ имеет сильный тип (p, p) .

Определение 3. Кривая принадлежит классу $\bar{K}_p (K_p)$, $1 \leq p < +\infty$, если оператор $T_\Gamma (S_\Gamma)$ имеет слабый тип (p, p) .

Теорема 1. Для кривых с условием хорды имеем:

а) $\Gamma \in \bar{K}_1 \Rightarrow \Gamma \in \bar{R}_p \quad \forall p > 1$;

б) $\exists p_0 > 1 \quad \Gamma \in \bar{K}_{p_0} \Rightarrow \Gamma \in \bar{K}_1$.

Из этой теоремы можно вывести ряд следствий.

Следствие. Пусть Γ — кривая с условием хорды. Для ограниченности оператора T_Γ в $L_p(\Gamma)$, $1 < p < +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы T_Γ имел слабый тип $(1, 1)$.

Теорема 2. Пусть Γ — жорданова спрямляемая кривая с условием

$$\text{vrai sup}_{\sigma \in (0, 2\pi)} \int_0^{2\pi} \left| \frac{t'(s)}{t(s) - t(\sigma)} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{s - \sigma}{2} \right| ds < +\infty. \quad (1)$$

Тогда оператор T_Γ ограничен в $L_p(\Gamma)$ для произвольного p , $1 < p < +\infty$.

В силу того, что (1) выполняется, например, для кривых с условием Дини, кусочно-ляпуновских кривых без точек заострения, а также кривых с ограниченным вращением (кривых Радона) без точек заострения (см. ^(8, 9)), теорема 1 содержит в себе ряд известных критериев ограниченности S_Γ в $L_p(\Gamma)$ (см. ^(4, 5, 7) и др.).

Теорема 3. Пусть спрямляемая жорданова кривая Γ с условием хорды принадлежит $\bar{R}_{p_0}$, $1 < p_0 < +\infty$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

а) существует такая постоянная $M_1(\Gamma)$, что для произвольного δ , $0 < \delta < 1$, измеримого множества $e \subset (-\pi, \pi)$ и $f \in L_1(\Gamma)$ будем иметь

$$\int_e |(T_\Gamma f)(t)|^\delta |dt| \leq \frac{M_1(\Gamma)}{1 - \delta} (me)^{1 - \delta} \left(\int_\Gamma |f(t)| |dt| \right)^\delta;$$

б) существуют такие постоянные $B(\Gamma)$ и $C(\Gamma)$, что для произвольной функции $f(t)$ с условием

$$\int_\Gamma |f(t)| \ln^+ |f(t)| < +\infty$$

справедливо неравенство

$$\int_\Gamma |(T_\Gamma f)(t)| |dt| \leq B(\Gamma) \int_\Gamma |f(t)| \ln^+ |f(t)| |dt| + C(\Gamma).$$

Отсюда и из результатов работы ⁽¹¹⁾ выводится следующая

Теорема 4. Пусть G — односвязная ограниченная область с границей Γ — кривой с условием хорды из класса $\bar{R}_{p_0}$, $1 < p_0 < +\infty$. Тогда:

а) если $f \in L_1(\Gamma)$, то интеграл типа Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(t) dt}{t - z} \in \bigcap_{0 < \delta < 1} E_\delta;$$

б) если угловые граничные значения функции $F(z)$ на Γ суммируемы, то тогда $F(z)$ представима интегралом Коши.

Пусть модуль непрерывности $\omega(\delta, t')$ функции $t'(s)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \frac{\omega^2(\delta, t')}{\delta} d\delta < +\infty. \quad (2)$$

В. П. Хавин ⁽⁶⁾ показал, что кривая Γ с условием (2) принадлежит $\bar{R}_p$ для произвольного p , $1 < p < +\infty$. Следовательно, из теорем 3 и 4 можем

заключить, что их утверждения справедливы и для кривых с условием (2). При выполнении условия (1) аналогичные результаты были отмечены в (9).

2. Полное описание мер, для которых справедливо неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(x)|^p d\mu \leq C(p, \mu) \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p d\mu, \quad (3)$$

было дано сначала Г. Хелсоном и Г. Сёге (12), а потом для любого L_p , $1 < p < +\infty$, в совместной работе Р. Ханта, Б. Макенхаута, Р. Уидена (13).

Определение. 2π -периодическая функция $w \in A_p$, если существует такая постоянная c_p , что для произвольного сегмента I длины, меньшей 2π , имеет место неравенство

$$\frac{1}{|I|} \int_I w(x) dx \left[\frac{1}{|I|} \int_I w^{-1/(p-1)}(x) dx \right]^{p-1} \leq c_p. \quad (4)$$

Теорема Ханта — Макенхаута — Уидена гласит: для справедливости неравенства (3) необходимо и достаточно, чтобы $d\mu = w dx$, $w \in A_p$, $1 < p < +\infty$.

Для различных классов весовых функций и кривых вопрос об ограниченности оператора S_Γ изучался в работах (4, 10, 14, 15) и др.

В дальнейшем $L_p(\Gamma, w)$ будем обозначать множество измеримых на Γ функций $f(t)$, для которых

$$\|f\|_{p,w} = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f[t(s)]|^p w(s) ds \right\}^{1/p} < +\infty,$$

где $w(s)$ — некоторая неотрицательная, измеримая функция. Пусть, далее, μ — мера, заданная на борелевских множествах: $\mu e = \int_e w(x) dx$.

Определение. Неотрицательная измеримая функция принадлежит классу A_1 , если существует такая постоянная M_0 , что почти всюду $w^*(s) \leq M_0 w(s)$, где $w^*(s)$ — максимальная функция для $w(s)$.

Теорема 5. Пусть Γ — кривая с условием хорды, принадлежащая $\tilde{R}_{p_0}$, $1 < p_0 < +\infty$. Тогда:

а) оператор T_Γ ограничен в $L_p(\Gamma, w)$ для любого p , $1 < p < +\infty$, и произвольного $w \in A_p$;

б) для произвольного $w \in A_1$ существует такая постоянная $M(\Gamma, w)$, что для любого $f \in L_1(\Gamma, w)$ имеет место неравенство

$$\mu\{\sigma: (T_\Gamma f)[t(\sigma)] > \lambda\} \leq \frac{M(\Gamma, w)}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} |f[t(\sigma)]| d\mu;$$

в) для любого $w \in A_1$ существует такая постоянная $N(\Gamma, w)$, что для произвольного δ , $0 < \delta < 1$, измеримого множества $e \subset (-\pi, \pi)$ и функции $f \in L_1(\Gamma, w)$ имеет место неравенство

$$\int_e |(T_\Gamma f)[t(\sigma)]|^\delta d\mu \leq N(\Gamma, w) \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f[t(\sigma)]| d\mu \right)^\delta;$$

г) для произвольного $w \in A_1$ существуют такие постоянные $D(\Gamma, w)$ и $D_1(\Gamma, w)$, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |(T_\Gamma f)[t(\sigma)]| d\mu \leq D(\Gamma, w) \int_{-\pi}^{\pi} |f[t(\sigma)]| \ln^+ |f[t(\sigma)]| d\mu + D_1(\Gamma, w).$$

Пусть $h(\tau)$ — вещественная измеримая функция с условием

$$\sup_{t \in \Gamma} \Omega(h, t) < \frac{2\pi}{\max(p, q)}, \quad q = \frac{p}{p-1}, \quad (5)$$

где $\Omega(h, t)$ — колебание функции $h(t)$ на Γ . Предположим, что

$$\rho(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(\tau) d\tau}{t - \tau}.$$

Из результатов работы ⁽¹⁴⁾ и теоремы 5 заключаем справедливость следующего утверждения.

Теорема 6. Пусть замкнутая жорданова спрямляемая кривая с условием хорды удовлетворяет условию (1).

Тогда для произвольного $p, 1 < p < +\infty$, существует такая постоянная $M_p(\Gamma, h)$, что

$$\int_{\Gamma} |(T_{\Gamma} f)(t) \rho(t)|^p |dt| \leq M_p(\Gamma, h) \int_{\Gamma} |f(t) \rho(t)|^p |dt|. \quad (6)$$

В частности, когда Γ — кривая Ляпунова, неравенство (6) для S_{Γ} было доказано И. Б. Симошенко ⁽¹⁴⁾. Для кривых Радона без точек заострения аналогичный результат получил В. Ю. Шелепов ⁽⁸⁾.

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук ГрузССР

Поступило
26 XII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ M. Riesz, Math. Zs., 27 (1927). ² A. Kolmogoroff, Fund. Math., 7 (1925).
³ А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, т. 1, М., 1965. ⁴ Б. В. Хведелидзе, Тр. Тбл. матем. ин-та, т. 23 (1956). ⁵ А. Г. Джваршейшвили, там же, т. 31 (1966). ⁶ В. П. Хавин, Матем. сб., т. 68 (110), № 4 (1965). ⁷ И. И. Данилюк, В. Ю. Шелепов, ДАН, т. 174, № 3 (1967). ⁸ В. Ю. Шелепов, Краевые задачи и интегральные уравнения, Авт. канд. диссертации, Донецк, 1968. ⁹ Г. А. Хускивадзе, Тр. симп. по механ. сплошной среды и родств. пробл. анал., т. 1, 1973. ¹⁰ В. М. Кокилашвили, Сообщ. АН ГрузССР, т. 77, № 3 (1975). ¹¹ В. А. Паарашвили, там же, т. 53, № 3 (1969). ¹² H. Helson, S. Szegö, Ann. Math. Pura Appl., v. 51 (1960). ¹³ R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden, Trans. Am. Math. Soc., v. 176 (1973). ¹⁴ И. Б. Симошенко, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 28, № 2 (1964). ¹⁵ И. И. Данилюк, Тр. Тбл. матем. ин-та, т. 33 (1966).