

Л. М. КУРШИН

К ЗАДАЧЕ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФОРМЫ СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ МАКСИМАЛЬНОЙ КРУТИЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ

(Представлено академиком Н. Н. Яненко 4 II 1975)

В связи с задачей о сен-венановом кручении призматического стержня с односвязным поперечным сечением B , ограниченным контуром L , рассматриваем функционал

$$U = \iint (4\varphi - \varphi_x^2 - \varphi_y^2) dx dy + 2 \int_L \varphi_n \varphi ds, \quad (1)$$

первая вариация которого в фиксированной области B

$$\delta U = 2 \iint_B (\Delta \varphi + 2) \delta \varphi dx dy + 2 \int_L \varphi \delta \varphi_n ds, \quad \Delta \varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy};$$

здесь φ_n — производная функция $\varphi(x, y)$ по нормали к контуру. Стационарному значению функционала соответствует уравнение для φ в области V

$$\Delta \varphi + 2 = 0 \quad (2)$$

и естественное условие на контуре

$$\varphi = 0. \quad (3)$$

Таким образом, для стационарности функционала (1) необходимо, чтобы функция φ была функцией кручения для области B ⁽¹⁾. При условиях (2), (3) значение функционала (1) равно жесткости кручения стержня

$$K = 2 \iint \varphi dx dy.$$

Вторая вариация функционала (1)

$$\delta^2 U = -2 \iint_B [(\delta \varphi_x)^2 + (\delta \varphi_y)^2] dx dy + 4 \int_L \delta \varphi_n \delta \varphi ds$$

и при $\delta \varphi = 0$ на L значение функционала, равное K , соответствует его максимуму.

Задача об определении формы сечения призматического стержня, имеющего наибольшую крутильную жесткость при заданной площади сечения, может быть поставлена как вариационная задача о стационарном значении функционала (1) в области с подвижной границей при дополнительном условии

$$\iint_B dx dy = F.$$

В соответствии с правилом Лагранжа для решения изопериметрической вариационной задачи ⁽²⁾ составляем функционал

$$V = U - \lambda \iint_B dx dy, \quad (4)$$

где λ — некоторая постоянная. Вариации интегралов с переменной областью интегрирования рассматривались в ⁽³⁻⁶⁾. На этой основе устанавливаем правила варьирования контурных интегралов. Для первой вариации функционала (4) при варьировании области получаем

$$\delta V = 2 \iint_B (\Delta \varphi + 2) (\delta \varphi - \varphi_x \delta x - \varphi_y \delta y) dx dy + \\ + 2 \int_L [\varphi (y_s \delta \varphi_x - x_s \delta \varphi_y + \varphi_{y_s} \delta x - \varphi_{x_s} \delta y) + (4\varphi + \varphi_x^2 + \varphi_y^2 - \lambda) (y_s \delta x - x_s \delta y)] ds,$$

где

$$\delta \varphi_x = \partial \delta \varphi / \partial x - \varphi_x \partial \delta x / \partial x - \varphi_y \partial \delta y / \partial x, \quad \delta \varphi_y = \partial \delta \varphi / \partial y - \varphi_x \partial \delta x / \partial y - \varphi_y \partial \delta y / \partial y.$$

Условию стационарности функционала (4) соответствует уравнение (2) в области, условие на контуре (3) и, кроме того, что весьма существенно, дополнительное условие на L

$$4\varphi + \varphi_x^2 + \varphi_y^2 = \lambda,$$

которое с учетом (3) можно записать в виде

$$\varphi_n = c. \quad (5)$$

Итак, для того чтобы при заданной площади сечения крутильная жесткость имела максимальное значение, необходимо, чтобы производная функции кручения по нормали к контуру была постоянна вдоль контура.

Результатом применения вариационного метода к функционалу в области с подвижной границей явилось получение вместо условия экстремума интеграла некоторого дополнительного условия на искомой границе. К уравнению (2) и условию (3) присоединяется избыточное для обычной краевой задачи условие (5), подчинение решению которому определяет саму форму области. Задача определения границы становится так называемой обратной краевой задачей. Методы решения некоторых задач такого типа обсуждались в ^(7, 8).

Для решения задачи о контуре, ограничивающем односвязную область, в которой существует функция, удовлетворяющая уравнению (2) и условиям (3), (5), введем регулярную в этой области аналитическую функцию $f(z)$ (комплексную функцию кручения ⁽⁹⁾) так, что

$$\operatorname{Re} f(t) = \varphi(x, y) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Условие для этой функции на искомом контуре

$$f'(t) = \bar{t} + ic \overline{dt}/|dt|.$$

Если $z = \omega(\xi)$ есть отображение единичного круга $|\xi| < 1$ на искомую область, то выражение

$$\overline{\omega(\tau)} + c \bar{\tau} \overline{\omega'(\tau)} / |\omega'(\tau)|, \quad \tau = \exp i\theta, \quad 0 < \theta < 2\pi,$$

должно быть граничным значением функции, регулярной внутри единичного круга. Этому условию удовлетворяет функция $\omega(\xi) = -c\xi$: максимальную крутильную жесткость имеет стержень кругового сечения. Этот результат находится в соответствии с теоремой, сформулированной Сен-Венаном в 1856 г. ⁽¹⁰⁾ и доказанной Поля и Серё в 1945 г. ⁽¹¹⁾.

В качестве более сложного примера обратимся к задаче о кручении стержня, имеющего цилиндрическую полость заданного очертания. При заданной площади сечения требуется определить внешний контур так, чтобы крутильная жесткость стержня с полостью была максимальной.

Пусть сечение стержня занимает двусвязную область B и ограничено наружным контуром L_1 и внутренним L_2 , F_1 и F_2 — площади, охватываемые этими контурами, так что площадь сечения $F = F_1 - F_2$.

Первая вариация функционала

$$U = \iint_B (4\varphi - \varphi_x^2 - \varphi_y^2) dx dy + 2 \int_{L_1} \varphi_n \varphi ds + 2\varphi_2 \left(2F_2 - \int_{L_2} \varphi_n ds \right), \quad (6)$$

где φ_2 — варьируемый параметр, при фиксированной границе $L = L_1 + L_2$ равна

$$\begin{aligned} \delta U = & 2 \iint_B (\Delta \varphi + 2) \delta \varphi dx dy + 2 \int_{L_1} \varphi \delta \varphi_n ds + \\ & + 2 \int_{L_2} (\varphi - \varphi_2) \delta \varphi_n ds + 2 \left(2F_2 - \int_{L_2} \varphi_n ds \right) \delta \varphi_2 \end{aligned}$$

и необходимым условиям стационарности функционала соответствует уравнение (2), краевые условия

$$\varphi = 0 \text{ на } L_1, \quad \varphi = \varphi_2 = \text{const на } L_2 \quad (7)$$

и, кроме того, условие

$$2F_2 - \int_{L_2} \varphi_n ds = 0. \quad (8)$$

Таким образом, функция $\varphi(x, y)$, соответствующая стационарному значению функционала U , есть функция кручения для двусвязной области. Условие (8) обеспечивает однозначность смещений.

При условиях (2), (7) и (8) функционал (6) имеет максимальное значение, равное крутильной жесткости стержня с полостью

$$K = 2 \iint_B \varphi dx dy + 2\varphi_2 F_2.$$

В задаче о разыскании формы внешнего контура L_1 , ограничивающего область, занимаемую поперечным сечением стержня, ослабленного полостью заданной формы L_2 из условия экстремальной жесткости кручения при заданной площади сечения F , рассматриваем функционал (4), где U согласно (6). Находим первую вариацию функционала в области с подвижной границей L_1

$$\begin{aligned} \delta V = & 2 \iint_B (\Delta \varphi + 2) (\delta \varphi - \varphi_x \delta x - \varphi_y \delta y) dx dy + 2 \int_{L_1} \varphi (y_s \delta x - x_s \delta y + \\ & + \varphi_{ys} \delta x - \varphi_{xs} \delta y) ds + 2 \int_{L_2} (\varphi - \varphi_2) \delta \varphi_n ds + 2 \left(2F_2 - \int_{L_2} \varphi_n ds \right) \delta \varphi_2 + \\ & + \int_{L_1} (4\varphi + \varphi_x^2 + \varphi_y^2 - \lambda) (y_s \delta x - x_s \delta y) ds. \end{aligned}$$

В качестве естественных условий вариационной задачи о стационарности функционала U получаем, кроме (2), (7), (8), дополнительное условие на подвижном контуре

$$\varphi_n = c. \quad (9)$$

При разыскании внешнего контура дополнительное краевое условие (9) должно быть присоединено к уравнению и граничным условиям для функции кручения (2), (7), (8). Результат сохраняет силу и в случае, когда

задан внешний контур и разыскивается контур, ограничивающий отверстие. В этом случае условие (9) накладывается на внутреннем контуре. При варьировании обоими контурами условие (9) должно выполняться как на одном, так и на другом контуре. Можно показать, что сечением, для которого функция кручения удовлетворяет этим условиям, будет кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями. Этот результат соответствует теореме, доказанной в ⁽¹²⁾.

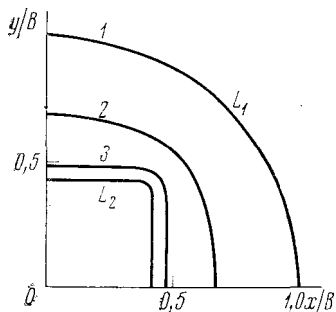


Рис. 1. Очертания контуров сечений стержней максимальной крутильной жесткости с квадратной полостью при различных значениях λ/B : 1, 3 — 0,9; 2 — 0,7

Задача определения контура L_1 двусвязной области B с заданным внутренним контуром L_2 из условия, чтобы в области существовала функция, удовлетворяющая уравнению (2) и условиям (7), (8), (9), введением комплексной функции кручения сводится к разысканию внешней границы L_1 двусвязной области, в которой существует регулярная однозначная аналитическая функция $f(z)$, удовлетворяющая на контуре L_2 условию

$$f(t) + \overline{f(t)} = 2\varphi_2 + t\bar{t}$$

и на неизвестном контуре L_1 условию

$$f(t) = \frac{1}{2} t\bar{t} + \frac{1}{2i} \int_{t_0}^t (\bar{t} dt - t \overline{dt}) + ic \int_{t_0}^t |dt|.$$

Решение можно получить введением отображения внешности круга $|\xi| > 1$ на внешность контура L_2 и внешности круга $|\xi| > 1$ на внешность искомого контура L_1

$$\omega_1(\xi) = B\xi \sum_{k=0}^n b_k \xi^{-k}, \quad \omega_2(\xi) = A\xi \sum_{k=0}^n a_k \xi^{-k}, \quad a_0 = b_0 = 1;$$

здесь коэффициенты a_k заданы, коэффициенты b_k разыскиваются; действительные постоянные A и B определяют масштаб.

Используя методы теории функций ^(13, 14), задачу можно свести к нелинейной системе уравнений относительно констант b_k .

На рис. 1 показаны результаты расчета, выполненного П. Н. Оноприенко; в расчетах удерживали коэффициенты $a_0, a_4, a_8; b_0, b_4, b_8$.

Новосибирский электротехнический институт

Поступило
30 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян, Кручение упругих тел, М., 1963. ² М. А. Лаврентьев, Л. А. Люстерник, Курс вариационного исчисления, М., 1950. ³ S. D. Poisson, Mém. Acad. France, v. 12, 286 (1833). ⁴ М. В. Остроградский, Mém. Acad. Pétersbourg., v. 6, 3, 35 (1835); Избр. тр., М., 1958. ⁵ O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig, 1949. ⁶ Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, М., 1933. ⁷ Г. Т. Тумашев, М. Т. Нужин, Обратные краевые задачи и их приложения, Казань, 1965. ⁸ Г. П. Черепанов, ПММ, т. 27, 3, 428 (1963); т. 27, 2, 275 (1963); т. 28, 1, 141 (1964). ⁹ Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., 1966. ¹⁰ Б. Сен-Венан, Мемуар о кручении призм, М., 1961. ¹¹ Г. Поляа, Г. Сегё, Изопериметрические неравенства в математической физике, М., 1962. ¹² G. Polya, A. Weinstein, Ann. Math., v. 2, 52 (1950). ¹³ М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, М., 1973. ¹⁴ Д. И. Шерман, Прикл. мех., т. 3, 4 (1957).