

И. Т. МАМЕДОВ

О РЕГУЛЯРНОСТИ ГРАНИЧНЫХ ТОЧЕК ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ И КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 12 III 1975)

Для уравнения теплопроводности необходимые и достаточные условия регулярности граничных точек даны в (1).

Если коэффициенты при старших производных линейного параболического уравнения 2-го порядка равномерно удовлетворяют логарифмическому условию Дини, то, как доказано в (2), условия регулярности для такого уравнения и уравнения теплопроводности совпадают.

1. Рассмотрим уравнение

$$L_1 u = a^{ih}(t, x) u_{x_i x_k} + b^i(t, x) u_{x_i} + c(t, x) u - u_t = 0, \quad (1)$$

определенное в некоторой ограниченной области D $(n+1)$ -мерного пространства R^{n+1} точек $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$. Предполагается, что для коэффициентов уравнения выполняются условия

$$\alpha_1 |\xi|^2 \leq a^{ih}(t, x) \xi_i \xi_k \leq \beta_1 |\xi|^2, \quad |b^i(t, x)| \leq C_0, \quad |c(t, x)| \leq C_0, \quad (2)$$

$$|a^{ih}(t, x) - a^{ih}(\tau, y)| \leq \varphi(\sqrt{|t-\tau| + |x-y|^2}), \quad \int_0^\rho \frac{\varphi(\rho)}{\rho} d\rho < \infty, \quad (3)$$

где C_0 , α_1 и β_1 — положительные константы, $\varphi(\rho)$ — неубывающая на $(0, \rho_0)$ функция от ρ .

Для уравнения (1) рассматривается задача Дирихле с непрерывной функцией, заданной на собственной границе $\Gamma(D)$ области D .

Введем следующие обозначения и определения.

Пусть $O_\delta(t^0, x^0)$ — δ -окрестность точки (t^0, x^0) .

Определение 1. Точка $(t^0, x^0) \in \Gamma(D)$ называется регулярной по Винеру относительно задачи Дирихле, если для любой непрерывной функции f , заданной на $\Gamma(D)$, для винеровского обобщенного решения $u_f(t, x)$ имеет место равенство

$$\lim_{(t, x) \rightarrow (t^0, x^0)} u_f(t, x) = f(t^0, x^0). \quad (4)$$

Пусть имеется класс Π параболических операторов вида L_1 , определенных в D и удовлетворяющих условиям (2) и (3).

Определение 2. Точка $(t^0, x^0) \in \Gamma(D)$ называется равномерно регулярной для задачи Дирихле относительно этого класса Π , если существует положительная функция $\Omega(\rho)$, $0 < \rho < \rho_0$, стремящаяся к нулю при $\rho \rightarrow 0$, со свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что, каковы бы ни были область $D' \subset D$, лежащая целиком в полупространстве $t < t^0$, и оператор $L' \in \Pi$, для ограниченного в D решения $u(t, x)$ уравнения (1) из

$$u|_{\Gamma(D') \cap O_\varepsilon(t^0, x^0)} \leq 0 \quad (5)$$

следует

$$u|_{D' \cap O_\delta(t^0, x^0)} < \Omega(\sqrt{|t-t^0| + |x-x^0|^2}). \quad (6)$$

Рассмотрим функцию

$$G(t-\tau, x-y) = \begin{cases} (t-\tau)^{-n/2} \exp \left[-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)} \right] & \text{при } t > \tau, \\ 0 & \text{при } t \leq \tau. \end{cases}$$

Пусть E — B -множество из R^{n+1} , целиком лежащее в полупространстве $t < t^0$. Назовем меру μ на E допустимой, если

$$\int_E G(t-\tau, x-y) d\mu(\tau, y) \leq 1 \quad \text{при } (t, x) \in E. \quad (7)$$

Число

$$\gamma(E, t^0, x^0) = \sup_E \int G(t^0-\tau, x^0-y) d\mu(\tau, y),$$

где верхняя грань берется по всем допустимым мерам, называется потенциалом множества E относительно точки (t^0, x^0) .

Определим две последовательности чисел $\{\rho_m\}$ и $\{\tau_m\}$:

$$\rho_0 = \frac{1}{2}, \quad \rho_{m+1} = \frac{\rho_m}{\sqrt{|\ln \rho_m|}}; \quad (8)$$

$$4n\tau_m |\ln \tau_m| = \rho_m^2. \quad (9)$$

Пусть

$$(t^0, x^0) \in \Gamma(D), \quad \bar{n} = \max(n, 3),$$

$$\Pi_m - \text{цилиндр } |x - x^0| < \rho_{m-\bar{n}}, \quad t^0 - \tau_m \leq t < t^0;$$

$$\Pi_m^1 - \text{цилиндр } |x - x^0| < \rho_m, \quad t^0 - \tau_m \leq t < t^0 - \tau_{m+1};$$

$$\Pi_m^2 - \text{цилиндр } |x - x^0| < \rho_{m+\bar{n}}, \quad t^0 - \tau_{m+\bar{n}} \leq t < t^0.$$

Пусть, далее, D^0 — область, содержащаяся в D , пересекающая собственную границу цилиндра Π_m ,

$$D_m^0 = D^0 \cap \Pi_m, \quad D_m^2 = D^0 \cap \Pi_m^2, \quad E_m = CD \cap \Pi_m^1, \quad \gamma(E_m, t^0, x^0) = \gamma_m^0.$$

Лемма. Пусть в D_m^0 определено положительное решение $u(t, x)$ уравнения (1), непрерывное в $\bar{D}_m^0$ и обращающееся в нуль на той части собственной границы D_m^0 , которая лежит строго внутри Π_m .

Тогда

$$\sup_{D_m^0} u > (1 + \eta \gamma_m^0) \sup_{D_m^1} u \quad (10)$$

при $m > m_0$, где $\eta > 0$ и m_0 зависят только от коэффициентов уравнения и n .

Эта лемма доказывается с помощью барьеров, построенных в (3).

Обозначим через A_m полосу $t^0 - \tau_m \leq t < t^0 - \tau_{m+1}$ и пусть

$$H_m = CD \cap A_m, \quad \gamma(H_m, t^0, x^0) = \gamma_m.$$

Теорема 1. Пусть точка $(t^0, x^0) \in \Gamma(D)$ и в D определен оператор L_1 , удовлетворяющий условиям (2) и (3). Для того чтобы точка (t^0, x^0) была регулярной по Винеру относительно задачи Дирихле, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m$ расходился.

Теорема 2. Пусть в условиях теоремы 1 ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m$ расходится.

Тогда точка (t^0, x^0) будет равномерно регулярной в смысле определения 2 и в качестве $\Omega(\rho)$ можно выбрать функцию

$$\Omega(\rho) = \exp[-N_1 S(\ln |\ln \rho|)], \quad (11)$$

$$S(t) = \sum_{m=1}^{l(t)} \gamma_m,$$

$N_1 > 0$ — константа, зависящая только от n .

Эти теоремы доказываются с помощью приведенной выше леммы.

2. Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$L_2 u = a^{ik}(t, k) u_{x_i x_k} + b(t, x, u, \nabla u) - u_t = 0, \quad (12)$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию (3) и, кроме того,

$$\alpha_2 |\xi|^2 \leq a^{ik}(t, x) \xi_i \xi_k \leq \beta_2 |\xi|^2; \quad (13)$$

$$|b(t, x, p, q)| \leq \mu(p) |q|^2 + C_1, \quad \int_0^{\mu_0} \mu(p) dp < \infty, \quad (14)$$

где C_1 — положительная константа.

Пусть выполнено следующее

Условие А. Для каждой функции $u(t, x)$, имеющей 2 непрерывные производные по x_i и одну по t , функция $B(t, x) = b(t, x, u(t, x), \nabla u(t, x))$ в D равномерно удовлетворяет условию Дини.

Рассмотрим для уравнения (12) задачу Дирихле и введем определения регулярности граничных точек, идентичные определениям 1 и 2.

Теорема 3. Пусть точка $(t^0, x^0) \in \Gamma(D)$ и в D определен оператор L_2 , удовлетворяющий условиям (3), (13), (14) и А. Для того чтобы точка (t^0, x^0) была регулярной по Винеру, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m$ расходился, где γ_m имеет тот же смысл, что и в теореме 1.

Теорема 4. Пусть в условиях теоремы 3 ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m$ расходится.

Тогда точка (t^0, x^0) будет равномерно регулярной и в качестве $\Omega(\rho)$ можно выбрать функцию

$$\Omega(\rho) = \exp[-N_2 S(\ln |\ln \rho|)], \quad (15)$$

где $S(t)$ имеет тот же смысл, что и в теореме 2, а $N_2 > 0$ — константа, зависящая только от n .

Следствие. Условия регулярности граничных точек для линейного уравнения (1) и квазилинейного уравнения (12) совпадают с условиями регулярности для уравнения теплопроводности.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность А. А. Новрузову за руководство, III. А. Алимову, проф. В. А. Ильину и проф. Е. М. Ландису за полезное обсуждение данной работы.

Азербайджанский институт нефти и химии
им. М. Азизбекова
Баку

Поступило
5 III 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Е. М. Ландис, ДАН, т. 185, № 3 (1969). ² А. А. Новрузов, ДАН, т. 209, № 4 (1973). ³ И. Т. Мамедов, Уч. зап. Азерб. ин-та нефти и химии им. М. Азизбекова, № 6 (1974).